

Institut National Agronomique
Paris-Grignon

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Tronc commun de première année

D.Flick 2006/2007

Préambule

L'objectif de ce cours est de présenter et d'appliquer (TD) les outils de base qui permettent de décrire et prédire les phénomènes de transfert de matière, de quantité de mouvement (forces) et d'énergie. De tels phénomènes ont lieu non seulement dans des équipements construits par l'homme mais également dans le milieu naturel, de l'échelle de la cellule jusqu'à celle de la biosphère.

La matière qui nous entoure couramment possède une très grande densité moléculaire (nombre de molécules par mètre cube) on peut sans problème la décrire à partir des concepts introduits en thermodynamique et la considérer comme un milieu continu. De ce fait, on peut tirer profit d'un grand nombre d'outils de l'analyse et de la géométrie.

Les transferts de matière, de quantité de mouvement et d'énergie présentent des similitudes, on présentera un formalisme unique pour écrire les différents bilans que ce soit sur des systèmes macroscopiques (équations différentielles ordinaires) ou des volumes élémentaires (équations aux dérivées partielles).

Les travaux dirigés permettront d'aborder un certain nombre d'applications de ces outils et les étudiants auront largement l'occasion d'utiliser et de compléter ces bases dans des enseignements optionnels.

Ce cours s'inspire essentiellement de l'ouvrage " Transport Phenomena " de R.B. Bird, W.E. Stewart et E.N. Lightfoot (John Wiley & Sons) où les étudiants trouveront de nombreux compléments et diverses illustrations. On pourra également se reporter à l'ouvrage "Mécanique et Rhéologie des fluides en Génie chimique" de N.Midoux (Tec.Doc. Lavoisier).

Sommaire

Introduction

1 Transfert de matière

1.1 Equation de conservation sur un élément de volume fixe

1.1.1 Masse totale

1.1.2 Masse du constituant i

1.2 Equation de conservation sur une particule de fluide suivie dans son mouvement

1.3 Equation d'état

1.4 Equation de transfert

1.4.1 Transfert unidirectionnel

1.4.2 Transfert pour un champ quelconque de concentration

1.5 Conditions aux limites

1.6 Combinaison des équations / Adimensionnalisation

1.7 Equation de conservation sur un domaine macroscopique ouvert

1.7.1 Masse totale

1.7.2 Masse du constituant i

2 Transfert de quantité de mouvement

2.1 Equation de conservation sur un élément de volume fixe

2.2 Equation de conservation sur une particule de fluide suivie dans son mouvement

2.3 Equation d'état

2.4 Equation de transfert

2.4.1 Fluide au repos - contraintes de pression

2.4.2 Fluide en écoulement unidirectionnel : contraintes visqueuses

2.4.3 Contraintes dans un fluide en écoulement quelconque

2.5 Conditions aux limites

2.6 Combinaison des équations / Adimensionnalisation

2.7 Notion de turbulence

2.8 Equations du mouvement pour un fluide parfait

- 2.9 **Equation de conservation sur un domaine macroscopique ouvert**
- 2.10 **Bilan d'énergie mécanique sur un élément de volume fixe**
- 2.11 **Bilan d'énergie mécanique sur un domaine macroscopique ouvert**
- 2.12 **Caractéristique des pompes et ventilateurs**
- 2.13 **Calcul des pertes de charge**
- 2.14 **Calcul de circuits**
- 2.15 **Ecoulement autour d'obstacles**
- 2.16 **Ecoulement en milieu poreux: perte de charge à travers un lit fixe**

3 Transfert d'énergie

- 3.11 **Equation de conservation sur un élément de volume fixe**
 - 3.1.1 Energie totale
 - 3.1.2 Energie interne
- 3.2 **Equation de conservation sur une particule de fluide suivie dans son mouvement**
- 3.3 **Equation d'état**
- 3.4 **Equation de transfert**
 - 3.4.1 Transfert unidirectionnel
 - 3.4.2 Transfert pour un champ quelconque de température
- 3.5 **Conditions aux limites/ Conditions aux interfaces**
- 3.6 **Combinaison des équations / Adimensionnalisation**
- 3.7 **Notion de coefficient de transfert entre une paroi et un fluide**
- 3.8 **Equation de conservation sur un domaine macroscopique ouvert**

4 Introduction à l'approximation filaire (modèle 1D)

Récapitulatif

Introduction

*Une seconde méthode d'application de la mécanique, qui évite de prendre en considération la division de la matière jusqu'aux points matériels « réels », est la mécanique des soi-disant milieux continus. Cette mécanique est caractérisée par la fiction que la densité et la vitesse de la matière dépendent d'une façon continue des coordonnées et du temps, et que la partie des interactions non explicitement donnée peut s'interpréter comme des forces superficielles qui sont aussi des fonctions continues de la position. **Albert Einstein***

*La physique est toujours un petit peu fausse **Yves Rocard***

La mécanique des milieux continus considère que **la matière remplit continûment des domaines déterminés de l'espace éventuellement séparés par des interfaces**. Ainsi à la pression atmosphérique, le volume moyen occupé par une molécule de gaz parfait est d'environ 4.10^{-17} mm^3 . Il est possible, sur des volumes très petits devant l'échelle macroscopique, de définir une valeur moyenne d'une propriété de ces particules qui soit intrinsèque, au sens par exemple, où la moyenne effectuée sur une moitié des particules est égale (à un infiniment petit près) à la moyenne effectuée sur l'autre partie. L'exemple le plus connu d'une de ces propriétés moyennes macroscopiques est l'énergie interne d'un gaz monoatomique: il s'agit de l'énergie cinétique des particules (lorsque celui-ci est au repos en moyenne macroscopique).

L'objet de ce cours est de présenter et d'utiliser les outils qui permettent de **décrire et de prédire l'évolution** (dans l'espace et dans le temps) de cette **matière à l'échelle macroscopique**. Nous ferons largement appel à la thermodynamique pour:

déterminer les **relations qui lient les différents paramètres** ($p, \rho, T, \hat{H} \dots$) **d'un matériau homogène: équations d'état**. On supposera (hypothèse de l'équilibre local) que dans un très petit volume autour d'un point, la matière peut être considérée comme homogène.

exemple : **gaz parfait** : $p/\rho = RT/M$, $\hat{H}\{T\} = \hat{H}\{T_0\} + \hat{C}_p \cdot (T - T_0)$

caractériser l'**équilibre** lorsqu'il y a coexistence de deux états possibles de ce matériau (équilibre liquide-vapeur, équilibre chimique)

exemple : **équilibre liquide-vapeur pour un corps pur** : $p = p_{\text{sat}}(T)$

formaliser les **principes fondamentaux de conservation** de la masse et de l'énergie, auxquels nous ajouterons la relation fondamentale de la mécanique, c'est-à-dire le principe de conservation de la quantité de mouvement.

accumulation + bilan des flux (sortie-entrée) = terme source

quantifier les flux diffusifs de matière et de chaleur, auxquels il faut rajouter ceux de quantité de mouvement qui correspondent aux frottement visqueux. Nous nous limiterons à l'approximation linéaire (non couplée) qu'offre la thermodynamique des phénomènes irréversibles.

exemple : **flux diffusif de chaleur** \propto **gradient de température**

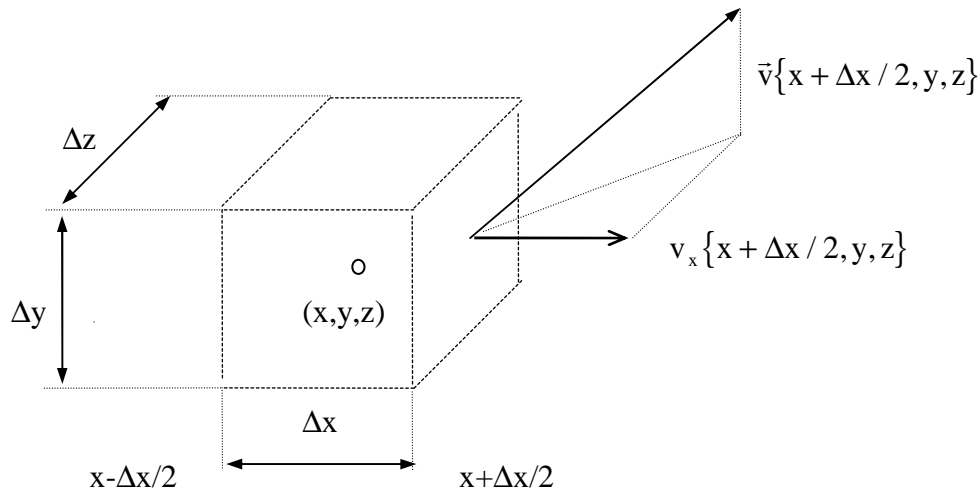
1) Transfert de matière

Nous allons commencer par analyser le transport d'un composant (dilué, du sel par exemple) dans un fluide (de l'eau par exemple) dont le mouvement est connu. Dans un premier temps nous considérons un petit élément de volume parallélépipédique ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$) fixe.

1.1) Equation de conservation sur un élément de volume fixe (masse totale et constituants)

1.1.1) Masse totale

Nous savons que la masse totale se conserve. Du fluide rentre ou sort par chacune des 6 facettes de l'élément de volume en fonction de la vitesse.



L'accumulation de masse dans l'élément entre $t - \Delta t/2$ et $t + \Delta t/2$ vaut:

$$[\rho\{x, y, z, t + \Delta t/2\} - \rho\{x, y, z, t - \Delta t/2\}] \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (\text{développement limité à l'ordre 2 en } x, y, z \text{ et } t)$$

La masse qui sort par la facette situé à l'est entre $t - \Delta t/2$ et $t + \Delta t/2$ vaut:

$$\rho\{x + \Delta x/2, y, z\} \cdot v_x\{x + \Delta x/2, y, z\} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$$

Ce **flux est dû au mouvement du fluide**, on dit qu'il s'agit d'un **flux convectif**.

Si on divise le bilan sur l'élément par le volume de l'élément on obtient alors:

$$\begin{aligned} \text{accumulation} & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho\{x, y, z, t + \Delta t/2\} - \rho\{x, y, z, t - \Delta t/2\}}{\Delta t} & + \\ & \frac{(\rho \cdot v_x)\{x + \Delta x/2, y, z, t\} - (\rho \cdot v_x)\{x - \Delta x/2, y, z, t\}}{\Delta x} & + \\ & \frac{(\rho \cdot v_y)\{x, y + \Delta y/2, z, t\} - (\rho \cdot v_y)\{x, y - \Delta y/2, z, t\}}{\Delta y} & + \\ & \frac{(\rho \cdot v_z)\{x, y, z + \Delta z/2, t\} - (\rho \cdot v_z)\{x, y, z - \Delta z/2, t\}}{\Delta z} & = 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Si l'on fait tendre Δx , Δy , Δz et Δt vers zéro (les termes d'ordre plus élevé des développements limités disparaissent), on obtient:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = 0}$$

accumulation bilan (sortie - entrée) des flux convectifs

Si on note $\rho \vec{v} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \end{pmatrix}$ le **vecteur densité de flux convectif**

et $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ le vecteur symbolique **nabla** (ici en coord. **cartésiennes**)

alors cette relation peut encore s'écrire:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0}$$

accumulation bilan des flux convectifs

L'expression $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\eta})$ encore notée $\text{Div}(\vec{\eta})$ est appelée **divergence du vecteur densité de flux $\vec{\eta}$** . Il s'agit du bilan (*sortie moins entrée*) du flux qui traverse les facettes de l'élément, divisé par le volume de cet élément. Remarquez la présence du point qui représente le produit scalaire de deux vecteurs.

1.1.2) Masse du constituant i

La même démarche peut être utilisée pour le bilan de la masse d'un constituant i sur un élément de volume. Notons ω_i la fraction massique du constituant i (masse du constituant i / masse totale). La masse du constituant i par unité de volume est alors $\rho \omega_i$. L'accumulation de masse du constituant i par unité de temps et de volume vaut donc:

$$\frac{\partial \rho \omega_i}{\partial t}$$

Le flux du constituant i à travers les facettes de l'élément peut être dû au **mouvement du fluide** qui transporte avec lui ce constituant. Ce flux est appelé **convectif**.

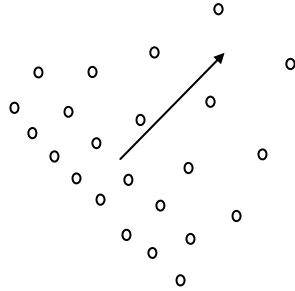
Le vecteur densité de flux convectif du constituant i vaut : $\rho \omega_i \vec{v}$

Sa direction et son sens sont celui du vecteur vitesse. Sa norme s'exprime en $(\text{kg}\{i\}/\text{s})/\text{m}^2$.

Le flux du constituant i peut également être dû au fait que la **fraction massique** ω_i **n'est pas homogène** dans le milieu. Ce flux est appelé **diffusif**.

Le vecteur densité de flux diffusif du constituant i est noté: \vec{j}_i .

Il dépend du gradient de la fraction massique (ou plus généralement du gradient du potentiel électrochimique). Son sens est du plus concentré au moins concentré. Sa norme s'exprime également en $(\text{kg}\{i\}/\text{s}) / \text{m}^2$.



Le vecteur densité de **flux total** du constituant i s'écrit simplement: $\vec{n}_i = \rho\omega_i\vec{v} + \vec{j}_i$

Le bilan des flux du constituant i à travers les facettes de l'élément de volume divisé par le volume de l'élément s'écrit : $\vec{\nabla} \cdot \vec{n}_i$.

Finalement l'équation de conservation de la masse du constituant i s'écrit:

$\frac{\partial \rho\omega_i}{\partial t}$	+	$\vec{\nabla} \cdot (\rho\omega_i\vec{v} + \vec{j}_i)$	=	r_i
accumulation		bilan des flux convectifs et diffusifs		terme source

Le terme r_i est la production du constituant i par unité de temps et de volume $(\text{kg}\{i\}/\text{s}/\text{m}^3)$ du fait d'éventuelles réactions chimiques.

Remarque:

La somme des densités de flux de tous les constituants vaut par définition $\rho\vec{v}$, d'où:

$$\rho\vec{v} = \sum_i \vec{n}_i = \rho(\sum_i \omega_i)\vec{v} + \sum_i \vec{j}_i \quad \text{or} \quad \sum_i \omega_i = 1 \rightarrow \sum_i \vec{j}_i = 0$$

C'est à dire que la somme des flux diffusifs de tous les constituants est nulle.

Si l'on somme les équations de conservation de la masse de tous les constituants on retrouve l'équation de conservation de la masse totale.

La vitesse \vec{v} est celle du barycentre de tous les constituants, c'est-à-dire la vitesse moyenne des molécules pondérée par leurs masses.

1.2) Equation de conservation sur une particule de fluide suivie dans son mouvement. (dérivée particulaire)

Les équations de conservation de la masse totale et de celle d'un constituant i s'écrivent:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \omega_i \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \omega_i \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \omega_i \cdot v_z)}{\partial z} + \frac{\partial j_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial j_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial j_{iz}}{\partial z} = r_i$$

en multipliant la première équation par ω_i et en la soustrayant à la seconde on obtient:
(en utilisant $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$)

$$\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial \omega_i}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial \omega_i}{\partial z} + \frac{\partial j_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial j_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial j_{iz}}{\partial z} = r_i$$

$$\boxed{\rho \left[\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \right] + \frac{\partial j_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial j_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial j_{iz}}{\partial z} = r_i}$$

Le terme entre crochet est appelé dérivée particulaire de ω_i , on le note $\frac{D\omega_i}{Dt}$.

La dérivée particulaire de ω_i représente l'évolution (au cours du temps) de ω_i lorsque l'on suit une particule de fluide (de masse totale fixée) dans son mouvement.

Sous forme vectorielle l'équation d'évolution de la fraction massique en suivant le fluide dans son mouvement s'écrit :

$$\boxed{\rho \frac{D\omega_i}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \omega_i \right] = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_i + r_i}$$

Remarque : la particule de fluide suit le mouvement et se déforme avec lui, il n'y a donc pas de mouvement moyen à travers ses frontières et donc pas d'échange convectif. Elle n'échange de la matière avec l'extérieur que par diffusion.

1.3) Equation d'état

Dans le cas général, la masse volumique est une fonction de la fraction massique des différents constituants (ainsi que de la pression et de la température) : $\rho = f\{p, T, \omega_i\}$

On a cependant souvent affaire à des milieux dilués, dans ce cas on peut considérer que la masse volumique est constante.

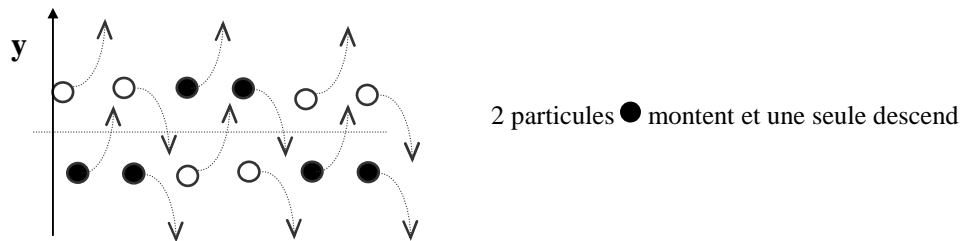
Remarquez que le volume ne se conserve pas a priori: un litre d'eau plus un litre d'alcool ne forment pas deux litres de mélange.

1.4) Equation de transfert (loi de Fick)

1.4.1) Transfert unidirectionnel

Considérons un mélange binaire non homogène de molécules A ● et B ○ au repos d'un point de vue macroscopique. Supposons que la fraction massique en A n'est fonction que de y et diminue avec y, ce qui se traduit par : $d\omega_A/dy < 0$.

L'agitation thermique ($\circ \rightarrow$) fait qu'une molécule a une chance sur deux d'aller vers les y positifs ou négatifs. Si l'on fait le bilan (à travers un plan perpendiculaire à oy), on trouve un flux net du constituant A dans le sens des y positifs, ce qui se traduit par : $j_{A,y} > 0$.



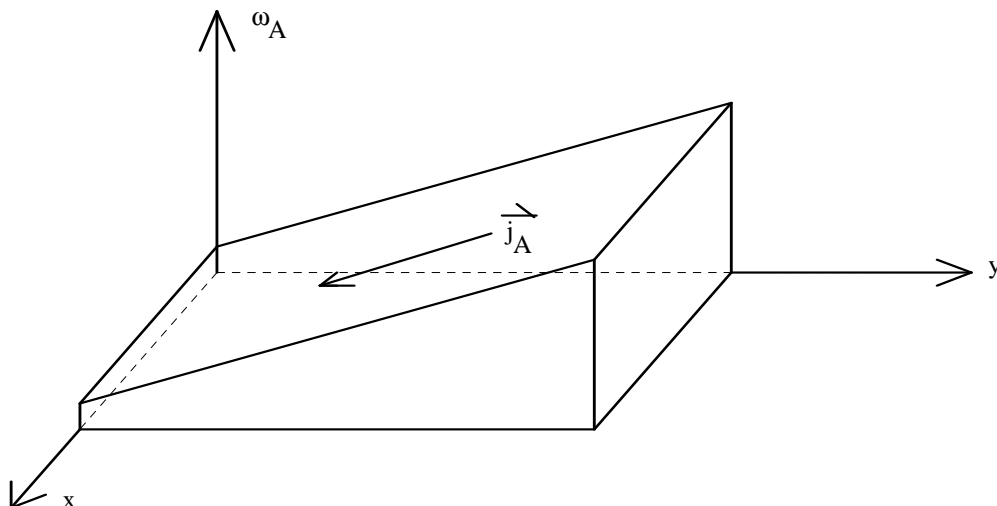
Un modèle simple qui puisse traduire cela est celui de Fick: $j_A = -(\text{constante}) \frac{d\omega_A}{dy}$

La **loi de Fick** est très largement utilisée, en phase gazeuse ou liquide, pour estimer les flux diffusifs. Elle peut être généralisée comme nous l'avons vu en thermodynamique en utilisant la variation du potentiel électrochimique au lieu de celui de la fraction massique. La diffusivité est en général fonction de la pression, de la concentration et de la température (elle augmente avec la température)

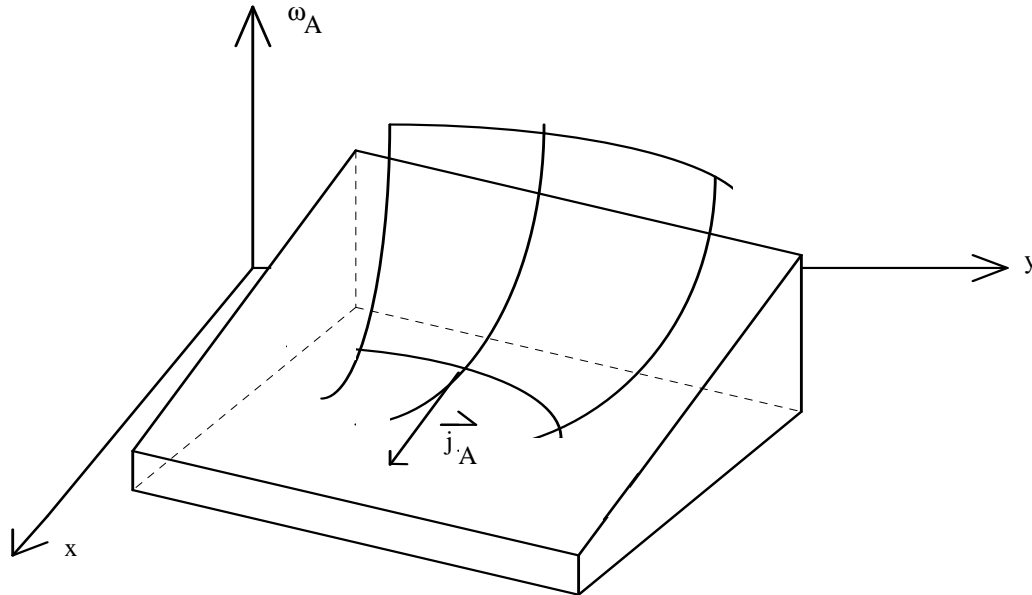
$$j_A = -D_{AB} \rho \frac{d\omega_A}{dy} \quad \text{avec } D_{AB} = f\{\omega_A, p, T\}$$

1.4.2) Loi de transfert pour un champ quelconque de concentration

Nous avons supposé précédemment que la fraction massique était linéaire par rapport à y (et indépendant de x). La surface $\omega_A = f\{x, y\}$ est dans ce cas particulier un plan dont la pente est nulle dans la direction ox et dont la plus grande pente est dirigé selon oy. Le vecteur densité de flux diffusif est orienté selon -oy, c'est à dire dans la direction de la plus grande pente descendante, et la densité de flux est proportionnelle à cette pente.



Considérons maintenant que la fraction massique est une fonction quelconque de x et de y . La surface $\omega_A=f\{x,y\}$ a maintenant un relief quelconque. En un point (x,y) nous pouvons trouver le plan tangent à cette surface, le vecteur densité de flux suit comme précédemment la ligne de plus grande pente descendante et est proportionnel à cette pente.



Le vecteur orienté selon la plus grande pente ascendante et dont la norme est égale à cette pente est le **vecteur gradient**, noté:

$$\vec{\nabla} \omega_A = \overrightarrow{\text{Grad } \omega_A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_A}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega_A}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_A}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Noter que cette fois le vecteur nabla $\vec{\nabla}$ n'est pas suivi d'un point, il ne s'agit pas d'un produit scalaire, ω_A est un scalaire et $\vec{\nabla} \omega_A$ est un vecteur.

Finalement, pour un **mélange binaire**, la **loi de Fick**, qui exprime le vecteur densité de flux diffusif s'écrit:

$$\vec{j}_A = -\rho D_{AB} \vec{\nabla} \omega_A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} j_{A,x} \\ j_{A,y} \\ j_{A,z} \end{pmatrix} = -\rho D_{AB} \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_A}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega_A}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_A}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Rappelons que par définition $\omega_A + \omega_B = 1$, $D_{AB} = D_{BA}$, $\vec{j}_A = -\vec{j}_B$

1.5) Conditions aux limites

Les équations que nous venons de présenter permettent de décrire ce qui se passe **dans un domaine** rempli d'un milieu continu. Pour prédire les évolutions du système il est indispensable de connaître également ce qui se passe **sur les frontières du domaine**, encore faut-il **définir très clairement les limites de ce domaine**.

Les conditions aux limites les plus simples peuvent se classer en trois catégories qui portent chacune un nom célèbre :

Dirichlet : on connaît les fractions massiques des constituants

Neumann : on connaît les flux diffusifs des constituants

Cauchy : on connaît une relation entre les fractions massiques et les flux des constituants

a) Condition de Dirichlet : on connaît la fraction massique ¹

C'est typiquement le cas à l'**entrée** d'un système. On connaît la composition à l'entrée d'un réacteur, la charge en polluant à l'entrée d'un digesteur, la teneur en sel d'une rivière alimentant un marais, etc.

C'est souvent le cas s'il y a des **équilibres de phase**. A l'interface entre des cristaux de sel et une solution, la concentration est égale à la concentration de saturation (loi d'équilibre entre la forme cristalline et la forme solutée). Si on s'intéresse à la diffusion de la vapeur d'eau au-dessus d'un étang, on peut dire qu'à l'interface la pression partielle de vapeur d'eau est égale à la pression de vapeur saturante (qui est fonction de la température de l'eau à l'interface : loi d'équilibre liquide-vapeur pour un corps pur)

Cela peut être une bonne approximation à l'**interface avec un milieu agité**. Considérons par exemple un milieu poreux saturé en eau qui est plongé dans une solution aqueuse agitée et de concentration connue. Au niveau de l'interface, la concentration de la solution contenue dans le milieu poreux est proche de celle du liquide. Dans ce cas, la diffusivité du soluté à travers l'eau contenue dans le milieu poreux a une signification et une valeur différente de la diffusivité du couple soluté/eau².

b) Condition de Neumann, on connaît la densité de flux diffusif du constituant

C'est typiquement le cas pour une **paroi imperméable**. La densité de flux total (convectif + diffusif) est nulle, par ailleurs, la vitesse est nulle près d'une paroi il n'y a donc pas de flux convectif. On en déduit que la densité de flux diffusif est nulle.

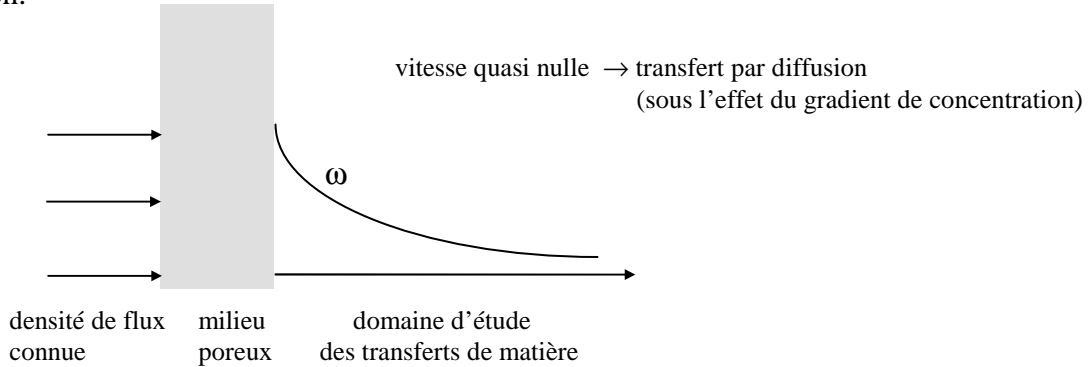
On peut souvent considérer qu'à la **sortie** d'un dispositif la diffusion est négligeable devant la convection³.

¹ Si le milieu est un mélange de I constituants, il faut imposer les fractions massiques pour (I-1) constituants, la fraction massique du I^{ème} constituant étant obtenue par la relation $\sum \omega_i = 1$

² Si la matrice du milieu poreux interagit avec le constituant on peut plus écrire l'égalité des concentrations mais seulement l'égalité des potentiels électrochimiques du constituant des deux côtés de l'interface

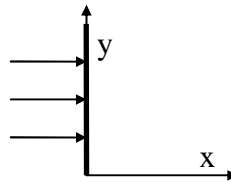
³ Il faut pour cela que la vitesse en sortie soit suffisamment importante, la tuyauterie assez longue jusqu'au prochain dispositif, ceci comparé à la diffusion moléculaire ou turbulente, $v.L/D \gg 1$).

D'autres situations peuvent être approchées par ce type de condition. Si, par exemple, on envoie une solution très concentrée avec un débit très faible à travers une paroi poreuse dans un système où la solution est peu concentrée. On connaît donc la densité de flux total du constituant. Du côté de la solution, la vitesse est très faible, le transfert s'y fait donc essentiellement par diffusion. Tout se passe donc comme si on connaissait la densité de flux diffusif à l'interface du côté de la solution.



Dans ces différents cas, on connaît donc la densité de flux diffusif, que nous noterons $j_{i,entrant}$, à travers une section ; comment traduire cela en équation ?

Commençons par une section perpendiculaire à ox

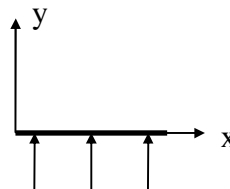


Dans ce cas nous connaissons en fait la **composante selon ox** de la densité de flux diffusif, que nous pouvons exprimer par ailleurs par la loi de Fick :

$$j_{i,entrant} \approx j_{i,x} = -\rho D_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x}$$

Si la section est perpendiculaire à oy , on a

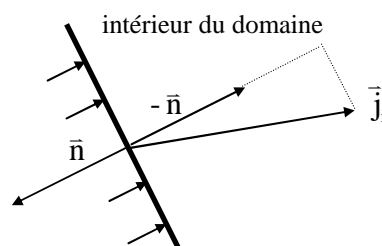
$$j_{i,entrant} \approx j_{i,y} = -\rho D_i \frac{\partial \omega_i}{\partial y}$$



Dans le cas d'une section perpendiculaire à un vecteur \vec{n} (vecteur normal unitaire) on connaît en fait la **projection sur \vec{n}** du vecteur densité de flux diffusif. On obtient cette projection en prenant le produit scalaire du vecteur densité de flux diffusif \vec{j}_i et de \vec{n} .

Comme, par convention \vec{n} est orienté vers l'extérieur du domaine, ce produit scalaire est égal au flux qui sort, c'est-à-dire à l'opposé de $j_{i,entrant}$. Finalement :

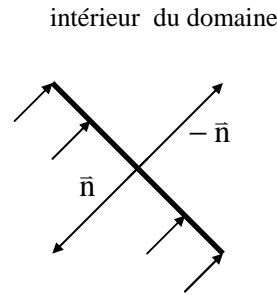
$$j_{i,entrant} \approx -\vec{j}_i \cdot \vec{n} = \rho D_i (\vec{\nabla} \omega_i) \cdot \vec{n}$$



Exemple : paroi inclinée à 45 degrés

$$\vec{n} = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} j_{i,\text{entrant}} &= \rho D_i (\vec{\nabla} \omega_i) \cdot \vec{n} \\ &= -\rho D_i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \right) \end{aligned}$$



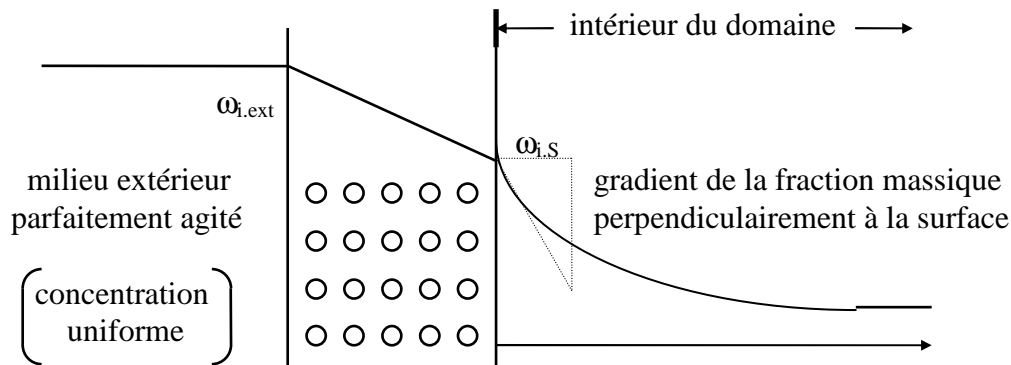
Si la paroi est imperméable on aura donc : $j_{i,\text{entrant}} = \rho D_i (\vec{\nabla} \omega_i) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla} \omega_i) \cdot \vec{n} = 0$

$$\text{pour une paroi à 45 degrés : } \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \omega_i}{\partial y} = 0$$

On vérifiera que pour des sections perpendiculaires à ox ou oy , on retrouve bien les relations précédentes.

c) Condition de Cauchy : on connaît une relation (affine) entre la densité de flux diffusif du constituant et la fraction massique

Donnons un exemple. La frontière est constituée d'une membrane de faible épaisseur: e (qui n'accumule pas de matière), du côté extérieur on a une solution de concentration connue et fortement agitée. Sur la surface extérieure de la membrane, la concentration est alors proche de la concentration moyenne du milieu agité : $\omega_{i,\text{ext}}$.



Si la **vitesse moyenne** est **nulle** dans la membrane alors les flux sont uniquement diffusifs (pas de convection puisque $\vec{v} = \vec{0}$ dans la membrane et à l'interface entre la membrane et le domaine étudié)

Le flux traversant la membrane (par diffusion) s'écrit

$$j_{i,\text{entrant}} = \rho D^* \frac{\omega_{i,\text{ext}} - \omega_{i,s}}{e} = \rho \cdot k \cdot (\omega_{i,\text{ext}} - \omega_{i,s})$$

Dans cette expression, D^* est la diffusivité du soluté à travers la membrane (cette diffusivité a une signification et une valeur différentes de la diffusivité du constituant i dans de l'eau seule). Le coefficient **k** est appelé **coefficient de transfert de matière de la membrane**.

Par ailleurs, le flux qui traverse la membrane est égal au flux diffusif à l'interface qui s'écrit :

$$j_{i,\text{entrant}} = \rho D_i \bar{\nabla} \omega_i|_S \cdot \bar{n}$$

A partir de ces deux expressions on obtient alors une relation entre la fraction massique et le gradient de la fraction massique à la limite du domaine ⁴ :

$$\rho \cdot k (\omega_{i,\text{ext}} - \omega_{i,S}) = \rho D_i \bar{\nabla} \omega_i|_S \cdot \bar{n}$$

$$\text{pour une surface perpendiculaire à } ox, \text{ on a } \left(-\rho D_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right)_{x=0} = \rho \cdot k \cdot (\omega_{i,\text{ext}} - \omega_i|_{x=0})$$

Certaines membranes peuvent également avoir des affinités (sur l'une des faces) pour des ions de signe donné, par ailleurs la vitesse moyenne n'est en général pas nulle à travers la membrane. La situation devient alors plus complexe à modéliser.

D'une manière générale, de nombreux modèles supposent que le flux à travers une membrane est proportionnel à la différence de fraction massique de part et d'autre de la membrane. Attention : parfois on se base plutôt sur des différences de concentration ou de pression partielle dans ce cas le coefficient de transfert s'exprime dans des unités et prend des valeurs différentes (bien vérifier dans quel cas on se trouve).

$$j_{i,\text{entrant}} = \rho \cdot k \cdot (\omega_{i,\text{ext}} - \omega_{i,\text{int}}) \text{ ou } j_{i,\text{entrant}} = k^* \cdot (C_{i,\text{ext}} - C_{i,\text{int}}) \text{ ou } j_{i,\text{entrant}} = k^{**} \cdot (p_{i,\text{ext}} - p_{i,\text{int}})$$

Généralités sur les conditions aux limites

Dans la pratique les conditions aux limites ne peuvent pas toujours être mises sous l'une des trois formes a-b-c précédentes, on peut cependant énoncer la règle suivante: Si l'on traite d'un mélange de I constituants, il faut écrire (I-1) équations scalaires portant sur les fractions massiques, sur l'ensemble de la frontière. La relation suivante relie en effet les fractions massiques entre elles: $\sum \omega_i = 1$

D'un point de vue mathématique ces équations doivent relier les variables intensives (fractions massiques) et les gradients (perpendiculairement à la surface) de ces variables intensives.

D'un point de vue physique elles relient les variables transportées (fractions massiques) et les flux diffusifs et convectifs des quantités transportées.

Nous verrons des conditions aux limites tout à fait similaires en transfert de chaleur, la variable intensive étant alors la température.

Récapitulatif :

Dirichlet : fraction massique imposée : $(\omega_i)_{S1}$ connu

Neumann : densité de flux diffusif imposée : $(\bar{\nabla} \omega_i)_{S2} \cdot \bar{n}$ connu

Cauchy : coefficient de transfert k donné : $(\bar{\nabla} \omega_i)_{S3} \cdot \bar{n} = a \cdot (\omega_i)_{S3} + b$, a et b connus

⁴ Dans ce cas, à la limite du domaine, le flux diffusif $\rho D_i \bar{\nabla} \omega_i \cdot \bar{n}$ est une fonction affine de la fraction massique $\omega_{i,S}$ (la fraction massique à l'extérieur $\omega_{i,\text{ext}}$ étant une donnée du problème).

Conditions d'interface

Dans certains des exemples de conditions aux limites vus précédemment, nous avons supposé que les caractéristiques du milieu extérieur au domaine d'étude étaient connues, y compris au niveau des interfaces. Si ce milieu extérieur est parfaitement agité, les variables intensives telles que la fraction massique peuvent être considérées comme uniformes, leurs valeurs à l'interface sont alors proches des valeurs moyennes qui peuvent être plus facilement connues.

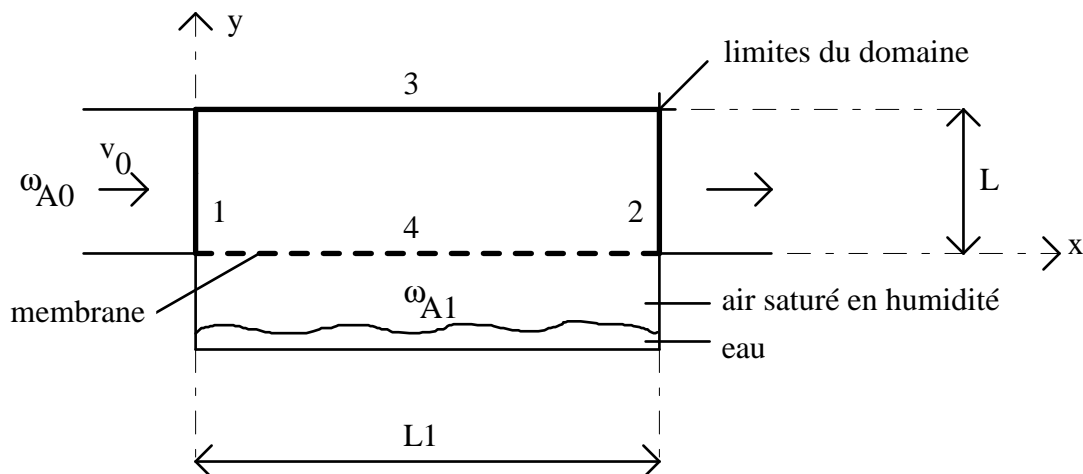
Parfois il n'est pas possible de faire de telles hypothèses, il faut alors traiter un système de **deux milieux continus séparés par une interface**. Cette interface peut être la surface de séparation de deux phases (liquide et vapeur, par exemple) ou une paroi qui laisse passer un flux de la quantité transportée (membrane pour le transfert de matière, paroi métallique d'un échangeur pour le transfert de chaleur).

1.6) Combinaison des équations - Adimensionnalisation

1.6.1) Combinaison des équations

Nous allons maintenant combiner les différentes équations dans le **cas particulier** d'un mélange binaire A/B, de masse volumique constante, répondant à la loi de Fick, sans réaction chimique, avec des conditions aux limites données par un coefficient de transfert uniforme.

Prenons l'exemple schématisé ci-dessous et raisonnons en deux dimensions. Il pourrait s'agir d'un humidificateur d'air (A : vapeur d'eau, B : air). La vitesse est supposée connue, elle est orientée dans la direction x et ne dépend que de y. La vitesse débitante (débit/section) est égale à v_0 . Une membrane sépare le domaine étudié d'une ambiance où la concentration du constituant A est connue et uniforme: ω_{A1} (par exemple de l'air saturé en humidité). La hauteur du dispositif est L.



a) Intérieur du domaine

conservation de la masse totale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \oplus \quad \rho = \text{cste} \quad (\text{eq. d'état})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{eq.1}) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \{y\} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ répond bien à cette équation}$$

conservation de la masse du constituant A:

$$\frac{\partial \rho \omega_A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \omega_A \vec{v} + \vec{j}_A) = r_A \oplus \rho = \text{cste} \oplus \vec{j}_A = -\rho D_{AB} \vec{\nabla} \omega_A \text{ (loi de transfert)} \oplus r_A = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega_A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\omega_A \vec{v} - D_{AB} \vec{\nabla} \omega_A) = 0$$

L'équation de conservation de la masse du constituant A par convection-diffusion (sans terme source et pour des propriétés physiques constantes) s'écrit donc :

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\omega_A \vec{v}) - D_{AB} \nabla^2 \omega_A = 0$$

Le terme $\nabla^2 \omega_A = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \omega_A$ encore noté $\Delta \omega_A$ est appelé **Laplacien** de ω_A . Il s'agit d'une généralisation de la dérivée seconde, caractéristique de la concavité. On obtient son expression en coordonnées cartésiennes en développant le produit scalaire⁵:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \omega_A = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial \omega_A}{\partial x}, \frac{\partial \omega_A}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \omega_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_A}{\partial y^2}$$

L'expression développée de l'équation de conservation du constituant s'écrit donc :

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + \left(\frac{\partial \omega_A v_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_A v_y}{\partial y} \right) - D_{AB} \left(\frac{\partial^2 \omega_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_A}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{eq. 2})$$

b) Limites du domaine

Sur la **section d'entrée 1** nous connaissons la fraction massique ω_{A0} :

$$\text{sur S1 (x = 0, 0 < y < L) : } \omega_A = \omega_{A,0} \quad (\text{eq.3})$$

Sur la **section de sortie 2**: nous négligeons la diffusion devant la convection:

$$\text{sur S2 (x = L1, 0 < y < L) : } \frac{\partial \omega_A}{\partial x} = 0 \quad (\text{eq.4})$$

La **paroi 3** est imperméable et perpendiculaire à oy:

$$\text{sur S3 (0 < x < L1, y = L) : } \frac{\partial \omega_A}{\partial y} = 0 \quad (\text{eq. 5})$$

Au niveau de la **membrane 4**, le flux convectif est négligeable et le flux diffusif est proportionnel à l'écart entre les fractions massiques de part et d'autre de la membrane:

$$\text{sur S4 (0 < x < L1, y = 0) : } \rho \cdot k \cdot (\omega_{A1} - \omega_A) = -\rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial y} \quad (\text{eq.6})$$

Si sous la membrane il y a de l'air saturé en humidité à la température T, alors:

$$x_{A,1} = p_{\text{sat}} \{T\} / p_{\text{tot}} = x_{\text{sat}} \{T\} \quad (\text{loi d'équilibre})$$

$$\text{et : } \omega_{A1} = \frac{x_{A,1} \cdot M_A}{x_{A,1} \cdot M_A + (1 - x_{A,1}) \cdot M_B} \quad \begin{array}{l} \text{relation entre fraction massique : } \omega \\ \text{et fraction molaire : } x \end{array}$$

⁵ Voir également le récapitulatif sur les opérateurs différentiels en fin de polycopié

c) Conditions initiales

Il reste à définir les **conditions initiales**, considérons par exemple qu'initialement la fraction massique de vapeur d'eau dans l'air est uniforme dans le domaine et égale à celle de l'air entrant: ω_{A0}

pour $t=0$ (quels que soient x et y): $\omega_A = \omega_{A0}$. (eq.7)

D'une façon générale, **un problème de mécanique des milieux continus** (et plus particulièrement le problème de transfert de matière posé ici) **est défini par la combinaison**

- des équations de **conservations** (masse totale, masse du constituant i) *toujours valables*
- des équations d'**état** (masse volumique constante) *propriétés d'équilibre*
- des lois d'**équilibre** (équilibre liquide-vapeur) *des fluides et autres matériaux*
- des **cinétiques de transformations** (réaction chimique absente ici) *propriétés hors d'équilibre*
- des lois de **transfert** (loi de Fick) *des fluides et autres matériaux*
- des conditions aux **limites** (entrée, sortie, paroi, membrane) *relatives à la configuration étudiée*
- et des conditions **initiales** (sauf en régime permanent) *et aux conditions de fonctionnement*

1.6.2) Adimensionnalisation

Définissons maintenant des **variables sans dimension**:

- la concentration adimensionnelle: $\omega_A^* = \frac{\omega_A - \omega_{A,0}}{\omega_{A1} - \omega_{A,0}}$

elle vaut 0 pour l'air entrant ou initialement présent dans le domaine
elle vaut 1 si l'air se sature entièrement

- les coordonnées adimensionnelles: $x^* = \frac{x}{L}$, $y^* = \frac{y}{L}$

- les composantes adimensionnelles de la vitesse: $v_x^* = \frac{v_x}{v_0} = 1$, $v_y^* = \frac{v_y}{v_0} = 0$

En effectuant les changements de variables relatifs à cette adimensionnalisation on obtient:

a) Intérieur du domaine

$$\left(\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \right) = 0 \quad (\text{conservation de la masse, eq. 1 multipliée par } L/v_0)$$

$$\frac{\partial \omega_A^*}{\partial \left(\frac{D_{AB} \cdot t}{L^2} \right)} + \frac{v_0 \cdot L}{D_{AB}} \left(\frac{\partial \omega_A^* v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \omega_A^* v_y^*}{\partial y^*} \right) - \left(\frac{\partial^2 \omega_A^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \omega_A^*}{\partial y^{*2}} \right) = 0$$

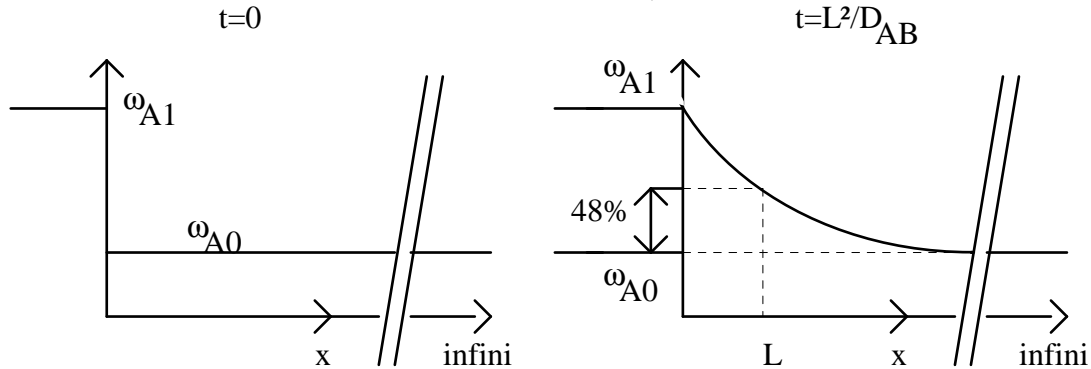
(conservation du constituant i, eq.2 multipliée par L^2/D_{AB})

On voit apparaître un temps adimensionnel appelé **nombre de Fourier** (matière) et noté Fo .

$$t^* = Fo = \frac{D_{AB} \cdot t}{L^2} = \frac{t}{L^2 / D_{AB}} \quad \leftarrow \text{ temps caractéristique de diffusion}$$

Considérons un milieu semi-infini de vitesse nulle (les transferts se font uniquement par diffusion), la fraction massique initiale est uniforme et égale ω_{A0} . Si à l'instant $t=0$, on porte la fraction massique à la surface ($x=0$) à une valeur ω_{A1} , alors à la distance L de la surface, la fraction massique réduite: $(\omega_A - \omega_{A0})/(\omega_{A1} - \omega_{A0})$ atteint une valeur de $0,48 \approx 1/2$ au bout d'une durée égale à L^2/D_{AB} (démonstration non présentée ici)

L^2/D_{AB} est donc un temps caractéristique de diffusion (durée nécessaire pour que "l'information" parcoure une distance L).



On voit également apparaître le rapport $(v_0 \cdot L / D_{AB})$ appelé **nombre de Peclet** et noté Pe . On peut l'interpréter comme un rapport d'ordres de grandeur entre flux convectif et diffusif.

$$Pe = \frac{v_0 \cdot L}{D_{AB}} = \frac{\rho \cdot v_0 (\omega_{A1} - \omega_{A0})}{\rho D_{AB} \frac{(\omega_{A1} - \omega_{A0})}{L}} \leftarrow \frac{\text{flux convectif}}{\text{flux diffusif}}$$

$\rho \cdot v_0 (\omega_{A1} - \omega_{A0})$ représente la différence entre le flux convectif à l'entrée (v_0, ω_{A0}) et celui qu'il y aurait à la sortie pour un dispositif très long $\omega_{A,\text{sortie}} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \omega_{A1}$

$\rho D_{AB} \frac{(\omega_{A1} - \omega_{A0})}{L}$ représente le flux diffusif à travers une épaisseur de fluide immobile L pour une différence de fraction massique $(\omega_{A1} - \omega_{A0})$

L'équation de conservation de la masse du constituant i peut donc se réécrire:

$$\frac{\partial \omega_A^*}{\partial Fo} + Pe \left(\frac{\partial \omega_A^* v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \omega_A^* v_y^*}{\partial y^*} \right) - \left(\frac{\partial^2 \omega_A^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \omega_A^*}{\partial y^{*2}} \right) = 0 \quad (\text{eq. 2'})$$

b) Limites du domaine

sur S1 ($x^* = 0, 0 < y^* < 1$) : $\omega_A^* = 0$ (eq.3')

sur S2 ($x^* = L1/L, 0 < y^* < 1$) : $\frac{\partial \omega_A^*}{\partial x^*} = 0$ (eq. 4')

sur S3 ($0 < x^* < L1/L, y^* = 1$) : $\frac{\partial \omega_A^*}{\partial y^*} = 0$ (eq. 5')

sur S4 ($0 < x^* < L1/L, y^* = 0$) : $\frac{\partial \omega_A^*}{\partial y^*} = \frac{k \cdot L}{D_{AB}} \cdot (\omega_A^* - 1)$ (rq : $\omega_{A1}^* = 1$)

Dans la condition aux limites relative au transfert à travers la membrane, on voit apparaître le rapport $(k.L)/D_{AB}$ appelé **nombre de Sherwood** (ou nombre de Nusselt matière) et noté Sh . Ce nombre compare le coefficient de transfert à travers la membrane k et D_{AB}/L qui caractérise les transferts par diffusion.

$$Sh = \frac{k.L}{D_{AB}} = \frac{k}{D_{AB}/L} \leftarrow \frac{\text{transfert à travers la membrane}}{\text{transfert diffusif}}$$

$\rho.k(\omega_{A,1} - \omega_{A,0})$ est la densité de flux traversant la membrane pour une différence de fraction massique $(\omega_{A,1} - \omega_{A,0})$

$\rho(D_{AB}/L).(\omega_{A,1} - \omega_{A,0})$ est la densité de flux diffusif à travers une épaisseur L de fluide immobile pour une différence de fraction massique $(\omega_{A,1} - \omega_{A,0})$

La condition aux limites S_4 peut donc encore s'écrire:

$$\text{sur } S_4 \ (0 < x^* < L_1/L, y^* = 0): \quad \frac{\partial \omega_A^*}{\partial y^*} = Sh(\omega_A^* - 1) \quad (\text{eq. 6'})$$

c) Conditions initiales

Les conditions initiales s'écrivent simplement:

$$\text{pour } t^* = Fo = 0, \text{ quels que soient } x^* \text{ et } y^*: \quad \omega_A^* = 0 \quad (\text{eq. 7'})$$

Pour un champ de vitesse donné, **les équations 2' à 7' décrivent entièrement le système.**

Elles permettent de calculer l'évolution du champ de la variable réduite $\omega_A^* = f\{x^*, y^*, Fo = t^*\}$ en fonction des paramètres adimensionnels: Pe , Sh et de la géométrie: (L_1/L)

L'intérêt de la forme adimensionnelle des équations est multiple:

- pour une géométrie donnée si on connaît $\omega_A^* = f\{x^*, y^*, Fo, Sh, Pe\}$, on connaît la solution pour toutes les dimensions L (L_1/L fixé), pour toutes les vitesses v_0 , toutes les diffusivités: D_{AB} , tous les coefficients de transfert: k , toutes les fractions massiques $\omega_{A,0}$ et $\omega_{A,1}$.
- les résultats bibliographiques concernant des géométries simples sont faciles à manipuler.
- on peut facilement comparer l'importance de plusieurs phénomènes; par exemple si le nombre de Peclet est élevé, les transferts par diffusion sont a priori négligeables devant les transferts par convection.
- si on cherche à caractériser expérimentalement un dispositif, le plan d'expérience est beaucoup plus léger: il suffit de faire varier deux nombres sans dimension: Sh et Pe (en jouant par exemple sur le débit et la nature de la membrane) plutôt que tous les paramètres dimensionnels: L , v_0 , ρ , D_{AB} , k , $\omega_{A,0}$ et $\omega_{A,1}$.

La résolution du système ne peut être effectuée de façon analytique que dans des géométries simples, il faut sinon avoir recours à des méthodes numériques, de nombreux logiciels existent dans ce domaine. Ceci ne dispense pas de **poser** le problème, par ailleurs on a toujours intérêt à valider la solution numérique dans un cas simplifié où il existe une solution analytique.

Remarque:

Il est possible d'obtenir directement les paramètres adimensionnels ($\omega_A^*, x^*, y^*, Fo, Sh, Pe$) dont dépend le problème par une analyse de tous les paramètres qui entrent en jeu ($\omega_A, \omega_{A,sat}, \omega_{A,0}, x, y, t, L, v_0, \rho, D_{AB}, k$) et des dimensions fondamentales que font intervenir ces paramètres.

Il faut remarquer, avant tout, que le problème est linéaire (ou plutôt affine) par rapport à la fraction massique: si ω_A^* est la solution pour les deux paramètres $\omega_{A0}=0$ et $\omega_{A1}=1$ (toutes choses égales par ailleurs), alors la solution pour des paramètres ω_{A0} et ω_{A1} quelconques est :

$$\omega_A = \omega_{A0} + \omega_A^* (\omega_{A1} - \omega_{A0}).$$

Ceci permet a priori de considérer uniquement la variable réduite: ω_A^* plutôt que $\omega_A, \omega_{A,sat}$ et $\omega_{A,0}$.

On forme alors la matrice des dimensions des variables.

	ω_A^*	x	y	t	L	v_0	ρ	D_{AB}	k
m	0	1	1	0	1	1	-3	2	1
s	0	0	0	1	0	-1	0	-1	-1
Kg	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Si n est le nombre de variables dimensionnelles en relation et p le rang de la matrice (dimension de la plus grande matrice carrée extraite à déterminant non nul) alors on peut exprimer la relation en faisant intervenir (n-p) nombres sans dimension.

Dans notre cas n=9 et le rang de la matrice vaut 3 (colonnes L, v_0 , ρ par exemple). D'ailleurs seul ρ fait intervenir une masse, il n'intervient donc pas, car il ne peut être mis en relation avec aucun autre paramètre.

La forme adimensionnelle de la relation fait donc intervenir 6 paramètres: $\omega_A^* = f\{x^*, y^*, Fo, Sh, Pe\}$

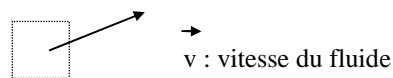
1.7) Equation de conservation sur un domaine macroscopique (masse totale et constituants)

1.7.1) Masse totale

Nous avons vu que sur un élément de volume fixe on peut écrire:

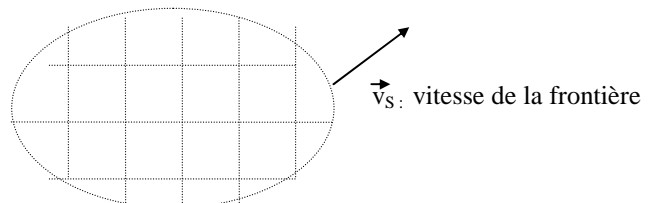
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

accumulation bilan des flux



Nous allons maintenant intégrer cette relation sur un système macroscopique dont le volume est noté: V et la frontière: S. Cette frontière peut éventuellement se déplacer à une vitesse notée \vec{v}_s . On obtient évidemment :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0$$



Deux théorèmes permettent de transformer cette expression pour la rendre plus facilement exploitable :

Relation de Leibnitz :
$$\frac{d}{dt} \int_V \theta \cdot dV = \int_V \frac{\partial \theta}{\partial t} dV + \int_S \theta \vec{v}_s \cdot \vec{n} dS \quad \text{par exemple : } \theta = \rho$$

(si la frontière est fixe on peut passer la dérivée sous le signe somme)

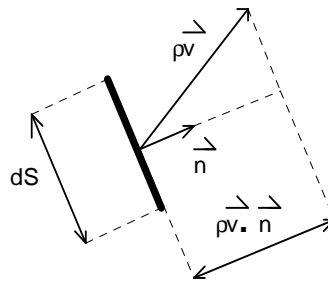
Relation d'Ostrogradskii
$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{\phi}) dV = \int_S (\vec{\phi} \cdot \vec{n}) dS \quad \text{par exemple : } \vec{\phi} = \vec{v}$$

En appliquant ces théorèmes on trouve :

$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_S \rho (\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS = 0$
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> accumulation bilan (sortie - entrée) des flux </div>

Le terme $\int_V \rho dV$ représente la masse totale contenue dans le système : m

Le flux qui sort à travers une facette fixe: dS, vaut: $\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$. Ceci traduit bien que, si le vecteur densité de flux: $\rho \vec{v}$, est parallèle à la facette, le flux qui traverse la facette est nul et s'il est perpendiculaire à la facette le flux vaut: $\rho |\vec{v}| dS$. (\vec{n} est le vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur)



Si la frontière est fixe, le flux de masse totale qui sort du système s'écrit donc : $\int_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dS$

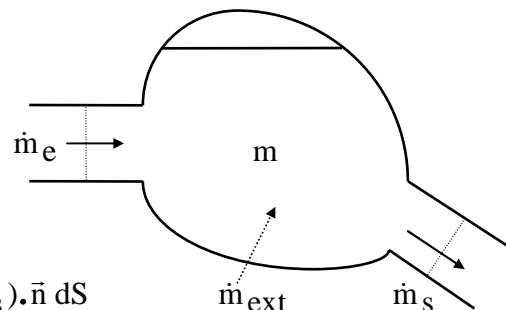
Si la frontière est mobile, il faut prendre la vitesse relative du fluide par rapport à cette frontière : $\vec{v} - \vec{v}_s$. Le terme $\int_S \rho (\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS$ représente donc le bilan (sortie-entrée) des flux de masse dans le cas général (frontière fixe ou mobile)

Pour un système ayant **une** section d'entrée et **une** section de sortie on peut écrire:

$\frac{dm}{dt} + \Delta(\dot{m}) = 0$

m : masse totale (de fluide) dans le système
 \dot{m}_e et \dot{m}_s : débit massique à l'entrée et à la sortie

$$m = \int_V \rho dV, \quad \Delta(\dot{m}) = \dot{m}_s - \dot{m}_e, \quad \dot{m}_e = \int_{S_e} \rho (\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS$$



S'il existe des apports extérieurs de masse entrant dans le système autrement que par les sections d'entrée/sortie (par des parois poreuses par ex.), il faudra les ajouter comme terme source : \dot{m}_{ext} , on écrit alors : $\frac{dm}{dt} + \Delta(\dot{m})_{s-e} = \dot{m}_{ext}$

1.7.2) Masse du constituant i

En intégrant l'équation de conservation pour le constituant i, on obtient:

$$\int_V \frac{\partial \rho \omega_i}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \omega_i \vec{v} + \vec{j}_i) dV = \int_V r_i dV$$

accumulation bilan des flux convectifs terme source
et diffusifs

En effectuant les mêmes transformations que pour la masse totale, on peut écrire:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \omega_i dV + \int_S \rho \omega_i (\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS + \int_S \vec{j}_i \cdot \vec{n} dS = \int_V r_i dV$$

accumulation bilan des flux convectifs et diffusifs terme source

(système pouvant avoir des frontières mobiles se déplaçant à la vitesse \vec{v}_s)

Pour un système ayant **une** section d'entrée et **une** section de sortie et en négligeant les flux diffusifs sur ces sections, on peut écrire:

$$\frac{dm_i}{dt} + \Delta(\bar{\omega}_i \cdot \dot{m}) = \int_V r_i dV + \dot{m}_{i,ext}$$

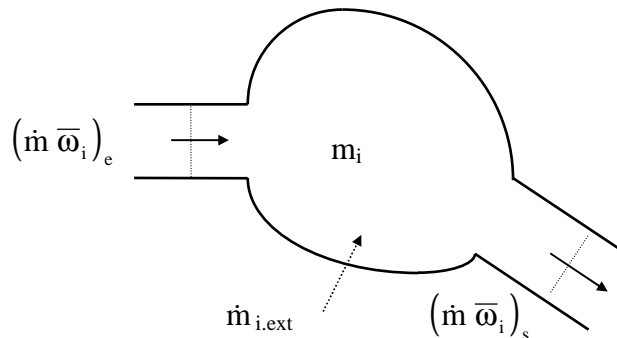
m_i est la masse du constituant i contenu dans le système

$\bar{\omega}_{i,e}$ est la fraction massique de mélange à l'entrée: $\bar{\omega}_{i,e} = \frac{\int_{S_e} \rho \omega_i ((\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n}) dS}{\dot{m}_e}$

(si la concentration est uniforme à l'entrée, on a simplement: $\bar{\omega}_{i,e} = \omega_{i,e}$)

$\dot{m}_{i,ext}$ est l'apport extérieur de masse du constituant i (Kg/s) entrant dans le système autrement que par les sections d'entrée sortie (par des parois poreuses par ex.)

$\int_V r_i dV$ représente la masse du constituant i apparaissant dans le système par unité de temps du fait de réactions chimiques



2) Transferts de quantité de mouvement

Je ne sais pas ce que le monde pensera de moi. Pour ma part, j'ai l'impression de n'avoir été qu'un enfant qui joue sur la plage et se divertit en trouvant ça et là un coquillage plus joli qu'à l'ordinaire, alors que le grand océan de la vérité reste inexploré devant moi. Isaac Newton

La philosophie (c'est à dire la science) est écrite dans ce très grand livre qui se tient constamment ouvert sous nos yeux, l'univers, et qui ne peut se comprendre que si l'on a préalablement appris à en comprendre la langue et à en connaître les caractères employés pour l'écrire. Ce livre est écrit dans la langue mathématique, ses caractères sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques, sans l'intermédiaire desquels il est impossible d'en comprendre humainement un seul mot, et sans lesquels on ne fait qu'errer vainement dans un labyrinthe obscur. Galileo Galilei

2.1) Equation de conservation sur un élément de volume fixe

Dans un repère galiléen, pour un point matériel, le principe fondamental de la mécanique s'écrit

pour la résultante:
$$\frac{d \vec{m} \vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d m v_x}{dt} = F_{x,\text{ext}} \\ \frac{d m v_y}{dt} = F_{y,\text{ext}} \\ \frac{d m v_z}{dt} = F_{z,\text{ext}} \end{cases}$$

pour le moment par rapport a O :
$$\frac{d \vec{OM} \wedge m \vec{v}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d m (y \cdot v_z - z \cdot v_y)}{dt} = (y \cdot F_{z,\text{ext}} - z \cdot F_{y,\text{ext}}) \\ \frac{d m (z \cdot v_x - x \cdot v_z)}{dt} = (z \cdot F_{x,\text{ext}} - x \cdot F_{z,\text{ext}}) \\ \frac{d m (x \cdot v_y - y \cdot v_x)}{dt} = (x \cdot F_{y,\text{ext}} - y \cdot F_{x,\text{ext}}) \end{cases}$$

Ceci traduit le fait que l'accumulation (dérivée par rapport au temps) de la quantité de mouvement selon une direction donnée est égale à la composante des forces extérieures selon cette direction. Ces **forces extérieures** apparaissent donc comme une **source de quantité de mouvement**.

Au paragraphe 1.1.2, nous avons écrit le bilan de la masse du constituant i sur un élément de volume fixe:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \omega_i}{\partial t}}_{\text{accumulation}} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\rho \omega_i \vec{v})}_{\text{bilan des flux convectifs}} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_i)}_{\text{bilan des flux diffusifs}} = \underbrace{r_i}_{\text{terme source}}$$

La fraction massique ω_i , qui était la **variable transportée**, représentait la masse du constituant i par unité de masse totale.

La quantité transportée à laquelle nous nous intéressons maintenant est la quantité de mouvement dans une direction donnée (ox: par exemple). La variable transportée correspondante est simplement v_x qui représente la quantité de mouvement dans la direction x par unité de masse (totale).

En remplaçant ω_i par v_x , on peut écrire les différents termes du bilan de quantité de mouvement dans la direction x sur un élément de volume fixe:

$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t}$	+	$\vec{\nabla} \cdot (\rho v_x \vec{v})$	=	ρg_x	+	bilan des forces exercées
accumulation		bilan des flux convectifs		forces volumiques à distance		par les éléments de fluide voisins à travers les facettes

$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t}$ est l'accumulation de quantité de mouvement (dans la direction x) par unité de temps (divisé par le volume de l'élément)

$\vec{\nabla} \cdot (\rho v_x \vec{v})$ représente le bilan des flux convectifs de quantité de mouvement (dans la direction x) qui sortent de l'élément par ses 6 facettes.

Le fluide qui traverse une des facettes avec une vitesse \vec{v} transporte avec lui (par unité de volume) une quantité de mouvement (dans la direction x) égale à $\rho \cdot v_x$; de la même façon qu'il transporte une masse de constituant i égale à $\rho \omega_i$

Le terme $\rho v_x \vec{v}$ est donc le vecteur densité de flux de quantité de mouvement dans la direction x; de la même façon que $\rho \omega_i \vec{v}$ est le vecteur densité de flux de masse du constituant i.

ρg_x représente les forces extérieures à distance par unité de volume.

La force volumique la plus couramment rencontrée est la gravité. Dans ce cas $\vec{g} = (g_x, g_y, g_z)$ avec $g_x = g_y = 0$ et $g_z = -g$: accélération de la pesanteur.

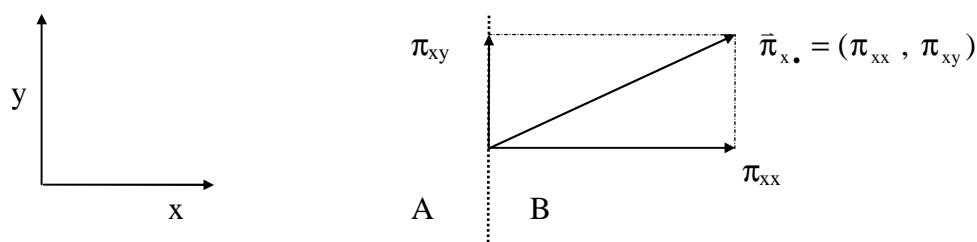
Il reste à écrire le bilan des forces exercées (dans la direction x) par les éléments de fluide voisins à travers les facettes. Raisonnons en deux dimensions.

La force qui s'exerce à travers une facette dépend de l'orientation de cette facette (et de la position de cette facette). On appelle **contrainte totale**, la force par unité de surface (homogène à une pression). On adopte les conventions suivantes :

π_{xx} **composante selon x** de la contrainte exercée à travers une **facette perpendiculaire à ox**.

π_{xy} **composante selon y** de la contrainte exercée à travers une **facette perpendiculaire à ox**.

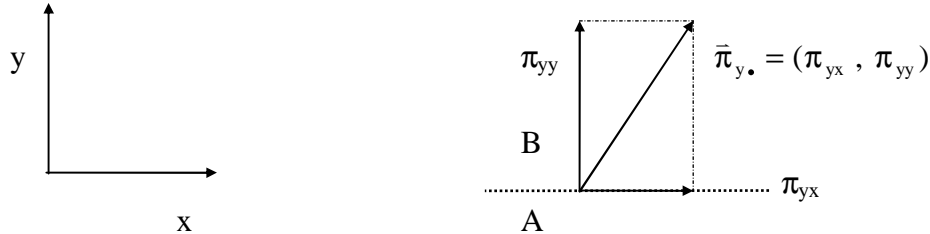
(dans le sens des x croissants, contrainte exercée par A sur B sur la figure ci-dessous)



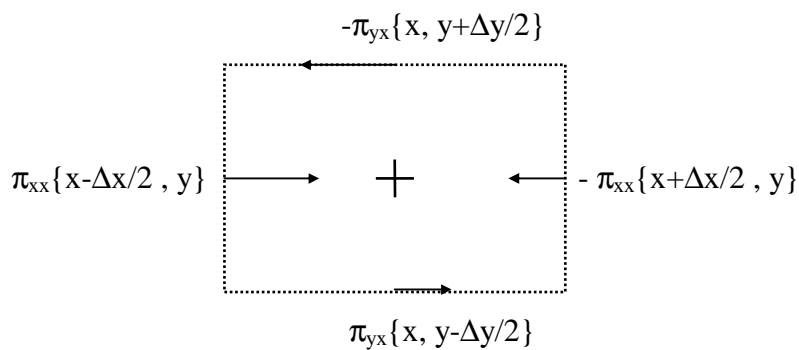
π_{yx} **composante selon x** de la contrainte exercée à travers une **facette perpendiculaire à oy**

π_{yy} **composante selon y** de la contrainte exercée à travers une **facette perpendiculaire à ox**.

(dans le sens des y croissants, contrainte exercée par A sur B sur la figure ci-dessous)



Faisons maintenant le bilan des forces exercées dans la direction x sur le fluide contenu dans un élément de volume à travers ses facettes.



La force exercée par le fluide situé à gauche sur celui de l'élément vaut : $\Delta y . \Delta z . \pi_{xx}\{x-\Delta x/2, y\}$
(composante selon x, facette \perp à ox, sens des x croissants)

La force exercée par le fluide situé à droite sur celui de l'élément vaut : $-\Delta y . \Delta z . \pi_{xx}\{x+\Delta x/2, y\}$
(sens des x décroissants, on applique la loi de l'action et de la réaction, d'où le signe négatif)

La force exercée par le fluide situé en dessous sur celui de l'élément vaut : $\Delta x . \Delta z . \pi_{yx}\{x, y-\Delta y/2\}$
(composante selon x, facette \perp à oy, sens des y croissants)

La force exercée par le fluide situé au dessus sur celui de l'élément vaut : $-\Delta x . \Delta z . \pi_{yx}\{x, y+\Delta y/2\}$
(sens des y décroissants \rightarrow signe négatif)

Faisons la somme et divisons par le volume de l'élément ($\Delta x . \Delta y . \Delta z$) on obtient :

$$\frac{\pi_{xx}\{x-\Delta x/2, y\} - \pi_{xx}\{x+\Delta x/2, y, z, t\}}{\Delta x} + \frac{\pi_{yx}\{x, y-\Delta y/2\} - \pi_{yx}\{x, y+\Delta y\}}{\Delta y}$$

Soit en passant à la limite : $-\left(\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y}\right)$

Sous forme développée en deux dimensions l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction x s'écrit donc :

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho v_x v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y} \right) = \rho g_x$$

En notant $\vec{\pi}_{.x} = \begin{pmatrix} \pi_{xx} \\ \pi_{yx} \end{pmatrix}$ on peut contracter $\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y}$ sous la forme $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\pi}_{.x})$

D'où la forme contractée de l'équation de conservation de la résultante de quantité de mouvement selon ox :

$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t}$	+	$\vec{\nabla} \cdot (\rho v_x \vec{v})$	+	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\pi}_{.x})$	=	ρg_x
accumulation		bilan des flux convectifs		bilan des forces surfaciques		forces volumiques à distance

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\pi}_{.x})$ représente le bilan des forces **qu'exerce** l'élément de volume sur ses voisins au travers de ses 6 facettes dans la direction x (divisé par le volume de l'élément).

Cela correspond à un bilan (**sortie - entrée**) de flux de quantité de mouvement

Des équations équivalentes vont bien sûr exprimer la conservation de la quantité de mouvement dans les direction oy et oz

Une analyse de l'équilibre en rotation d'un petit élément de volume autour de l'axe oz aboutit à $\pi_{yx} = \pi_{xy}$ (non démontré ici). L'équation de conservation du moment de la quantité de mouvement se traduit donc par le fait que l'ordre des indices est indifférent pour la contrainte totale:

$\pi_{yx} = \pi_{xy} \quad , \quad \pi_{yz} = \pi_{zy} \quad , \quad \pi_{zx} = \pi_{xz}$

Les différentes composantes des contraintes peuvent être regroupées dans une matrice symétrique appelée tenseur des contraintes totales :

$$\vec{\vec{\pi}} = \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{pmatrix}$$

Attention:

En **coordonnées cylindriques**, les vecteurs de base dépendent de la position du point, ce qui rend l'**écriture** des opérateurs gradient et divergence **plus complexe**. Il ne suffit donc pas de remplacer x par r et y par θ pour passer en cylindrique. On trouvera l'expression des équations de bilan dans différents systèmes de coordonnées par exemple dans *Transport phenomena* (cité en préambule).

De très nombreux auteurs utilisent une convention de signe différente pour les contraintes totales, ils notent $\sigma_{ij} = -\pi_{ij}$. La convention adoptée dans ce cours est celle utilisée dans *Transport Phenomena*, elle a l'avantage de pouvoir assimiler les forces à des flux de quantité de mouvement et de conduire à des lois de transfert similaires pour la quantité de mouvement (fluide newtonien incompressible), la matière (loi de Fick) et la chaleur (loi de Fourier).

Ecrivons maintenant la conservation de la quantité de mouvement dans les trois directions x,y et z.

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho v_x v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_x v_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zx}}{\partial z} \right) = \rho g_x$$

$$\frac{\partial \rho v_y}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho v_y v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_y v_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zy}}{\partial z} \right) = \rho g_y$$

$$\frac{\partial \rho v_z}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho v_z v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_z v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z v_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zz}}{\partial z} \right) = \rho g_z$$

Ceci peut s'écrire matriciellement:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z) + \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \rho v_x v_x & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_x & \rho v_y v_y & \rho v_y v_z \\ \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z v_z \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{pmatrix} = (\rho g_x, \rho g_y, \rho g_z)$$

On voit apparaître deux matrices:

$$\begin{pmatrix} \rho v_x v_x & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_x & \rho v_y v_y & \rho v_y v_z \\ \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z v_z \end{pmatrix} \text{ notée } \rho \vec{v} \vec{v} \quad \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{pmatrix} \text{ notée } \bar{\pi}$$

Rappelons la forme du vecteur symbolique nabla: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ (coord. cartésiennes)

Les trois équations de conservation de la résultante de la quantité de mouvement peuvent donc être résumées sous la forme

$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t}$	+	$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v})$	+	$\vec{\nabla} \cdot (\bar{\pi})$	=	$\rho \vec{g}$
accumulation		bilan des flux convectifs		bilan des forces surfaiques		forces volumiques à distance

Les trois équations de conservation du moment de la quantité de mouvement s'expriment, quant à elles par le fait que la matrice $\bar{\pi}$ est symétrique:

$\pi_{xy} = \pi_{yx}$ $\pi_{yz} = \pi_{zy}$ $\pi_{zx} = \pi_{xz}$	$\Leftrightarrow \bar{\pi} = (\bar{\pi})^t$	où $(\bar{\pi})^t$ est la matrice transposée de $\bar{\pi}$ obtenue en inversant les indices des lignes et des colonnes
---	---	--

La matrice $\bar{\pi}$ est appelée tenseur des contraintes totales. Dans un repère cartésien on peut l'assimiler à une matrice symétrique

2.2) Equation de conservation sur un élément de masse fixe suivi dans son mouvement.

Effectuons la même opération qu'au paragraphe 1.2, c'est à dire soustrayons l'équation de conservation de la masse multipliée par v_x à celle de conservation de la quantité de mouvement dans la direction x:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0 \quad \otimes (-v_x) \\ \oplus \\ \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_x v_z}{\partial z} = - \left[\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zx}}{\partial z} \right] + \rho g_x \end{array} \right.$$

$$\text{d'où} \quad \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = - \left[\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zx}}{\partial z} \right] + \rho g_x$$

$$\text{soit vectoriellement : } \rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_x \right] = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}_x + \rho g_x$$

en coordonnées cartésiennes et sur l'ensemble des trois composantes de la vitesse :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} + \rho \vec{g}$$

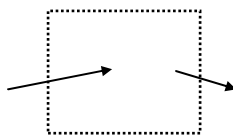
La dérivée particulière de la vitesse $D\vec{v} / Dt$ (évolution de \vec{v} en suivant le mouvement) n'est autre que l'accélération d'une particule matérielle de fluide. Le terme de droite de l'équation représente les forces exercées sur cette particule à travers ses facettes et les forces à distance (par unité de volume).

bilan sur un élément de volume fixe dans l'espace

système ouvert : du fluide entre et sort à travers les facettes et transporte avec lui de la quantité de mouvement (par convection)

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} + \rho \vec{g}$$

bilan des flux
accumulation + (convectifs) à travers les facettes = terme source : forces extérieures

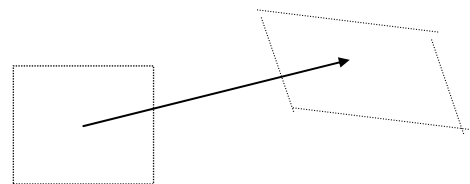


bilan sur une particule de fluide suivie dans son mouvement

système fermé : la particule se déplace et se déforme avec le fluide, il n'y a pas d'échange de flux convectif par les facettes

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} + \rho \vec{g}$$

masse * accélération = forces extérieures



Remarque : la dérivée particulière est un cas particulier de dérivée d'une fonction de plusieurs variables en suivant un chemin.

exemple : $y=f\{x,t\}$

si l'on suit un chemin caractérisé par $x=g\{t\}$ alors $y=f\{g\{t\},t\}$ on peut ainsi définir la dérivée de y par rapport à t en suivant ce chemin :

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=g\{t\}} = \frac{d[f\{g\{t\},t\}]}{dt}$$

on peut également raisonner en différentiant y selon un chemin où $dx=g'\{t\}dt$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial t} dt \rightarrow \left. dy \right|_{dx=g'.dt} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} g'\{t\} + \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt \rightarrow \left. \frac{dy}{dt} \right|_{dx=g'.dt} = \frac{\partial y}{\partial x} g'\{t\} + \frac{\partial y}{\partial t}$$

cas de la dérivée particulière de \vec{v} : $\vec{v} = \vec{v}\{x,y,t\}$ chemin $dx=v_x.dt$ et $dy=v_y.dt$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\substack{dx=v_x.dt \\ dy=v_y.dt}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

En coordonnées non cartésiennes l'expression de la dérivée particulière ci-dessus n'est plus correcte du fait que les vecteurs de base ne sont pas fixes, l'expression généralisée s'écrit:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} \cdot \bar{\pi} + \rho \vec{g}$$

où $\vec{v} \wedge \vec{w}$ représente le produit vectoriel de \vec{v} et de \vec{w}

et $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ représente le rotationnel de \vec{v} qui en coord. cartésiennes vaut:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2.3) Equation d'état

Nous avons déjà indiqué que la masse volumique est, en général, fonction de la pression et de la température, citons quelques cas particuliers. En première approximation, la masse volumique des liquides peut être considérée comme constante. Il en est de même pour les gaz, si la pression et la température varient peu et que les vitesses sont faibles devant la célérité du son, c'est le cas pour beaucoup de problèmes d'écoulement d'air ($v < 60 \text{ m/s}$).

Pour un **gaz parfait** de masse molaire M , nous connaissons une relation qui lie p, ρ et T :

$$pV = nRT \Rightarrow p = R\rho T / M \quad (\rho = nM / V)$$

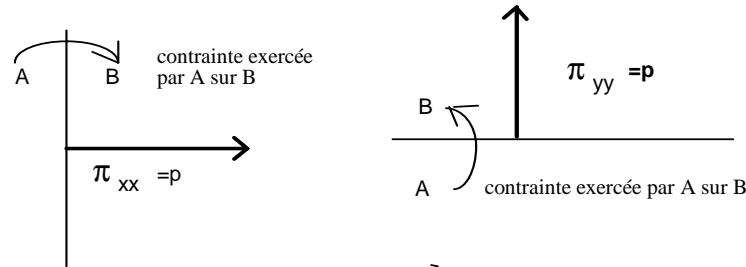
Si la température est constante (**gaz parfait isotherme**) on obtient une relation immédiate entre la pression et la température: $p / \rho = RT / M = \text{cste}$

Dans certains cas on peut considérer que le gaz parfait s'écoule sans échanger de chaleur et sans frottement (**gaz parfait isentropique**), on sait qu'alors $pV^\gamma = \text{cste}$, d'où: $p / \rho^\gamma = \text{cste}$

2.4) Loi de transfert⁶

2.4.1) Fluide au repos - Contrainte de pression

Un **fluide** est **défini** par le fait qu'au repos, les contraintes sur une surface élémentaire sont normales (perpendiculaires) à cette surface et sont indépendantes de l'orientation de la surface. La contrainte (force par unité de surface) est alors égale à la pression du fluide en ce point.

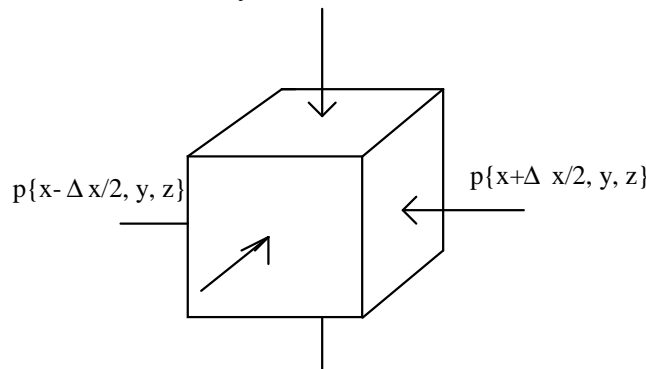


Ainsi pour un fluide au repos: $\pi_{xx} = \pi_{yy} = \pi_{zz} = p$ et $\pi_{xy} = \pi_{yz} = \pi_{zx} = 0$

$$\text{Soit: } \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en condensé : } \bar{\bar{\pi}} = p \bar{\bar{I}}$$

Si on fait le bilan des forces dans la direction x sur un volume élémentaire, on voit que les forces de pression rapportées à l'unité de volume valent:

$$\frac{(p\{x - \Delta x / 2, y, z\} - p\{x + \Delta x / 2, y, z\}) \cdot \Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} \text{ soit en passant à la limite: } -\frac{\partial p}{\partial x}$$



En généralisant aux trois composantes, on voit que la résultante des forces de pression, rapportée à l'unité de volume, est l'opposé du gradient de la pression:

$$-\begin{pmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \\ \partial p / \partial z \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} p$$

C'est bien ce que l'on obtient en prenant l'opposé de la divergence de $\bar{\bar{\pi}}$ (fluide au repos)

$$-\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\pi}} = -\vec{\nabla} \cdot p \bar{\bar{I}} = -\vec{\nabla} p$$

⁶ En mécanique, on parle plutôt de loi de comportement du matériau

Equilibre statique d'un fluide

Pour un fluide au repos et soumis à la gravité, le bilan de quantité de mouvement s'écrit:

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\pi} = \rho \vec{g} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot p \bar{I} = \rho \vec{g} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \\ \partial p / \partial z \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Si ρ est constant : $p = p\{z = 0\} - \rho g z = p\{h = 0\} + \rho g h \quad (h = -z)$

2.4.2) Fluide en écoulement - Contraintes de frottement visqueux

Lorsque le fluide est en mouvement, en plus des contraintes de pression, il s'exerce des contraintes de frottement visqueux notées $\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ etc. Ces contraintes sont regroupées dans une matrice (symétrique) appelée tenseur des contraintes de cisaillement (on parle également de contraintes visqueuses ou de contraintes de déformation).

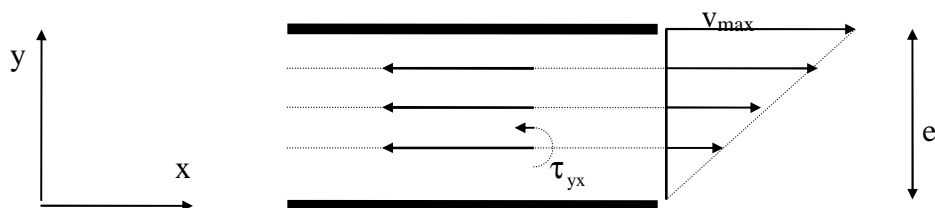
$$\begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zx} & \pi_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zx} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{en condensé} \quad \bar{\pi} = p \cdot \bar{I} + \bar{\tau}$$

contraintes
contraintes
contraintes de cisaillement
totales
de pression
(ou contraintes visqueuses)

Soit, par exemple : $\pi_{xx} = p + \tau_{xx}$ ou $\pi_{yx} = \tau_{xy}$

Écoulement unidirectionnel - Cisaillement simple

Considérons le cas du cisaillement simple. Du fluide est contenu dans l'entrefer de deux plaques. Celle du bas est fixe, celle du haut est en translation selon x à une vitesse v_{\max} .



Alors la vitesse varie linéairement selon y :

$$v_x\{y\} = v_{\max} \cdot \frac{y}{e} \quad \text{c.a.d.} \quad \frac{dv_x}{dy} = \frac{v_{\max}}{e} = \text{cst}$$

$\frac{dv_x}{dy}$ est appelé **taux** ou vitesse **de cisaillement**

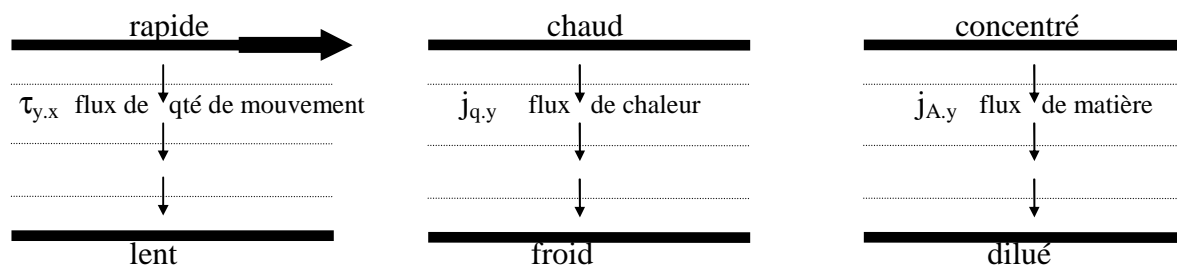
Une couche de fluide exerce sur celle située au-dessus (et la couche de fluide supérieure exerce sur la plaque du haut) une force de frottement visqueux dans la direction opposée à l'écoulement. Cette force par unité de surface est la **contrainte de cisaillement** (ou de frottement visqueux) : τ_{yx} (la force est exercée à travers une section perpendiculaire à Oy dans le sens des y positifs et elle est dirigée dans la direction Ox).

Pour un **fluide newtonien** on a : $\tau_{yx} = -\rho\nu \frac{dv_x}{dy}$

ν est appelé **viscosité cinématique (m²/s)**

$\mu = \rho\nu$ est appelé **viscosité dynamique (Pa.s)**

Noter l'analogie avec les transferts de matière (loi de Fick) et de chaleur (loi de Fourier)



$$\tau_{y,x} = -\rho\nu \frac{dv_x}{dy}$$

$$j_{q,y} = -\lambda \frac{dT}{dy} = -\rho\alpha \frac{d\hat{H}}{dy} (\hat{C}_p = \text{cste})$$

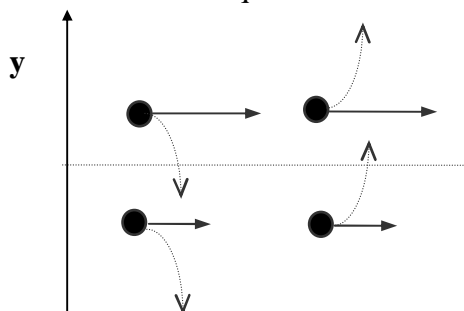
$$j_{A,y} = -\rho D_{AB} \frac{d\omega_A}{dy}$$

ν , $\alpha = \lambda / (\rho \cdot \hat{C}_p)$ et D_{AB} ont la même unité : m²/s

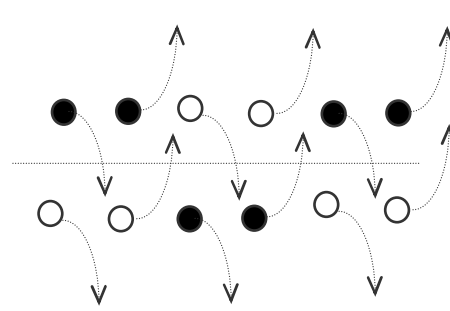
On peut assimiler la contrainte de cisaillement à un flux diffusif de quantité de mouvement et la viscosité cinématique à un coefficient de diffusion de la quantité de mouvement⁷. Du fait de l'agitation moléculaire (schéma ci-dessous) des particules vont traverser le plan perpendiculaire à oy. Autant de particules iront de *haut en bas* que de *bas en haut* (conservation de la masse). Mais les particules qui descendent transportent avec elles une quantité de mouvement (selon ox) plus importante que celles qui montent, d'où un flux net de quantité de mouvement.

Les particules rapides qui descendent vont entrer en collision avec les particules plus lentes de la couche inférieure et réciproquement pour les particules qui montent, ceci explique la force visqueuse d'entraînement de la couche lente par la couche rapide.

transfert diffusif de quantité de mouvement



transfert diffusif de matière



⁷ D'ailleurs le nombre de Prandtl: $Pr = \nu / \alpha$ est proche de 1 pour l'air ($Pr_{\text{air}} = 0,71$).

La viscosité dynamique est fonction de la température: elle augmente avec la température pour les gaz et diminue pour les liquides, mais elle varie peu avec la pression des gaz.

Attention de nombreux fluides rencontrés dans le domaine biologique, agro-alimentaire et environnemental sont non-newtoniens (compote, ketchup, boues, sang à l'échelle des capillaires)

2.4.3) Contraintes dans un fluide en écoulement quelconque

Ce que nous venons de voir n'est valable que si l'écoulement est unidirectionnel: $v_y=v_z=0$ et que v_x ne dépend que de y .

Dans le cas des transferts de chaleur ou de matière, si T (resp. ω) est une fonction quelconque de x , y et z . On généralise la relation en utilisant la notion de gradient (pente généralisée).

Dans le cas d'un écoulement quelconque, on serait tenté de faire de même pour les transferts de quantité de mouvement. Cela conduirait à :

$$\tau_{xx} = -\rho v \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \tau_{yx} = -\rho v \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \tau_{zx} = -\rho v \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = -\rho v \frac{\partial v_y}{\partial x} \text{ etc.} \quad \leftarrow \textbf{(Faux)}$$

Nous savons que la matrice $\bar{\tau}$ est symétrique, on doit avoir par exemple $\tau_{yx} = \tau_{xy}$

Or il n'y a aucune raison a priori pour que $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ soit égal à $\frac{\partial v_y}{\partial x}$.

On ne peut donc pas simplement raisonner par analogie, il faut revenir à la cause première des contraintes de frottement visqueux : la déformation des particules de fluide. Si le fluide se translate en bloc ou tourne en bloc, comme un solide, le fluide ne se déforme pas et il ne s'ajoute pas de contraintes supplémentaires à celles de pression. On décompose donc localement le mouvement en une combinaison de translation, de rotation et de déformation. Puis on énonce que seule la déformation contribue aux frottements visqueux et on considère une dépendance linéaire pour les fluides newtoniens.

Finalement pour un **fluide newtonien incompressible**, on a :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho v \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad \tau_{xx} = -2\rho v \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

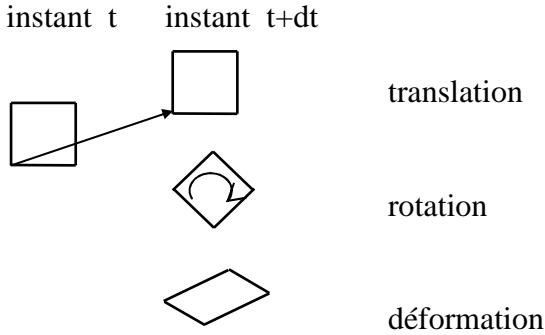
et des relations similaires pour $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, τ_{yy} et τ_{zz}

De façon mnémotechnique, on peut retenir qu'on 'symétrise' la relation pour $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ et que pour τ_{xx} on prend la même relation que pour τ_{xy} en changeant l'indice y en x , d'où le facteur 2

En deux dimension on peut écrire matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} = -\rho v \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{rappel } \mu = \rho v$$

Le paragraphe suivant présente cette démarche en 2 dimensions.



Considérons une particule de fluide qui à l'instant t forme un carré de côté dl

A : coin inférieur gauche est situé en (x, y)

B : coin inférieur droit est situé en $(x+dl, y)$

C : coin supérieur gauche est situé en $(x, y+dl)$

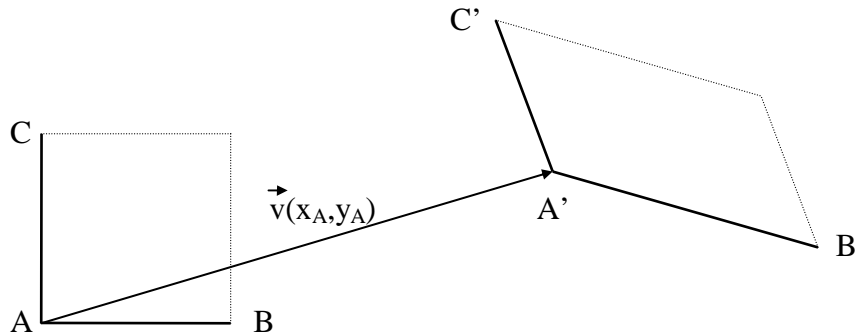
À l'instant $(t+dt)$ cette particule de fluide s'est déplacée, a tourné et s'est déformée

Un point M de coordonnées (x_M, y_M) quelconque de la particule de fluide devient M' de coordonnées $(x_M + v_x\{x_M, y_M\}dt, y_M + v_y\{x_M, y_M\}dt)$

A devient A' qui est situé en $(x + v_x\{x, y\}dt, y + v_y\{x, y\}dt)$

B devient B' qui est situé en $(x + dl + v_x\{x+dl, y\}dt, y + v_y\{x+dl, y\}dt)$

C devient C' qui est situé en $(x + v_x\{x, y+dl\}dt, y + dl + v_y\{x, y+dl\}dt)$



En effectuant des développements limités du type : $v_x\{x + dl, y\} = v_x\{x, y\} + dl \frac{\partial v_x}{\partial x}\{x, y\}$, on obtient :

$$\text{coord. de B'} = \begin{cases} x + dl + \left(v_x\{x, y\} + dl \frac{\partial v_x}{\partial x}\{x, y\} \right) dt \\ y + \left(v_y\{x, y\} + dl \frac{\partial v_y}{\partial x}\{x, y\} \right) dt \end{cases}$$

$$\text{coord. de C'} = \begin{cases} x + \left(v_x\{x, y\} + dl \frac{\partial v_x}{\partial y}\{x, y\} \right) dt \\ y + dl + \left(v_y\{x, y\} + dl \frac{\partial v_y}{\partial y}\{x, y\} \right) dt \end{cases}$$

Les vecteurs qui déterminent les côtés

sont à l'instant t :

$$\overrightarrow{AB} = dl \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = dl \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et deviennent à l'instant $(t+dt)$:

$$\overrightarrow{A'B'} = dl \cdot \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dt \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dt \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A'C'} = dl \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dt \\ 1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dt \end{pmatrix}$$

La matrice de changement de base s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dt & \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dt \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dt & 1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dt \end{pmatrix} = \bar{\bar{I}} + \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot dt$$

En composant $\vec{\nabla}$ et \vec{v} on peut former une matrice

$$\vec{\nabla} \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial / \partial x & \partial / \partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

la première colonne est $\vec{\nabla} v_x$
la seconde colonne est $\vec{\nabla} v_y$

La transposée de $\vec{\nabla} \vec{v}$ est appelée **gradient du vecteur vitesse** $(\vec{\nabla} \vec{v})^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$

La matrice de changement de base s'écrit donc : $\bar{\bar{I}} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t \cdot dt$

La matrice de changement de base d'une rotation suivi d'une déformation linéaire symétrique s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1+a & c \\ c & 1+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix}$$

Si la **déformation** et la **rotation** sont de faible amplitude (a, b, c et ω petits), on a :

$\cos(\omega) \approx (1 - \omega^2 / 2) \approx 1$, $\sin(\omega) \approx \omega$, d'où :

$$\begin{pmatrix} 1+a & c \\ c & 1+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix} \approx \left[\bar{\bar{I}} + \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\bar{\bar{I}} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\approx \left[\begin{matrix} \text{symétrique} & + & \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right] \quad ((1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2) \approx 1 + \epsilon_1 + \epsilon_2)$$

antisymétrique

La matrice de changement de base décrivant la rotation et la déformation de la particule de fluide s'écrit : $\bar{\bar{I}} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t \cdot dt$.

D'où l'idée de décomposer $(\vec{\nabla}\vec{v})^t$ en une partie symétrique plus une partie antisymétrique.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & 2\frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} dt + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{\nabla}\vec{v})^t = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{v} + (\vec{\nabla}\vec{v})^t) + \frac{1}{2}((\vec{\nabla}\vec{v})^t - \vec{\nabla}\vec{v}) = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}$$

On peut donc identifier:

- le vecteur de translation \vec{T} à: $\vec{v}\{\vec{x}\}dt$

- la matrice liée à la rotation $\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ à: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} dt = \overline{\overline{\Omega}} dt$

- la matrice liée à la déformation $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ à: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & 2\frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} dt = \overline{\overline{D}} dt$

La matrice $\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{v} + (\vec{\nabla}\vec{v})^t)$, partie symétrique du gradient de vitesse, est appelée **tenseur des taux de déformation** (ou des vitesses de déformations) c'est de lui seul que dépendent les contraintes de cisaillement qui s'ajoutent aux contraintes de pression.

La relation la plus simple que l'on puisse imaginer entre les contraintes de cisaillement et les taux de déformation est une relation linéaire. On retrouve ainsi sous une forme condensée les équations qui caractérisent les contraintes de cisaillement (ou visqueuses) des fluides incompressibles newtoniens. Le coefficient de proportionnalité est : -2μ

$$\overline{\overline{\tau}} = -2\mu\overline{\overline{D}} = -2\mu \left[\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{v} + (\vec{\nabla}\vec{v})^t) \right] \text{ c.a.d. } \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & 2\frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Vérifions que le tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{D}}$ est nul pour une translation en bloc ou une rotation en bloc et que l'on retrouve le résultat précédent pour un cisaillement simple.

- pour une **translation en bloc** on a:

$$\begin{cases} v_x = \alpha = \text{cste} \\ v_y = \beta = \text{cste} \end{cases} \text{ d'où } (\vec{\nabla}\vec{v})^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le gradient de vitesse est nul et donc a fortiori $\overline{\overline{D}}$

- pour une **rotation en bloc** autour de (x_0, y_0) on a:

$$\begin{cases} v_x = -\omega(y - y_0) \\ v_y = \omega(x - x_0) \end{cases} \text{ d'où } (\vec{\nabla} \vec{v})^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

le gradient de vitesse est antisymétrique, $\bar{\bar{D}}$ est donc bien nul

- pour un **cisaillement simple** on a:

$$\begin{cases} v_x = a.y = \frac{dv_x}{dy} \cdot y \\ v_y = 0 \end{cases} \text{ d'où } \vec{\nabla} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{dv_x}{dy} & 0 \end{pmatrix} \quad (\vec{\nabla} \vec{v})^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{dv_x}{dy} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{dv_x}{dy} \\ \frac{dv_x}{dy} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{loi de Newton } \bar{\bar{\tau}} = -\mu(\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) \rightarrow \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \frac{dv_x}{dy} \\ -\mu \frac{dv_x}{dy} & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien la contrainte de cisaillement $\tau_{yx} = -\mu(dv_x / dy)$

Les calculs sont plus lourds mais sont généralisables sans difficultés à trois dimensions, dans ce cas, le tenseur des taux de déformation vaut:

$$\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Finalement, pour un **fluide newtonien incompressible**, on obtient l'expression ci-dessous pour le **tenseur des contraintes totales**.

$$\bar{\bar{\pi}} = p \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \quad \text{avec} \quad \bar{\bar{\tau}} = -2\mu \bar{\bar{D}} = -2\mu \left[\frac{1}{2}(\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) \right] \quad \begin{cases} \bar{\bar{\pi}} : \text{tenseur des contraintes totales} \\ p : \text{pression statique} \\ \bar{\bar{\tau}} : \text{tenseur des contraintes de déformation} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Si l'on voulait traiter des fluides compressibles, il faudrait encore **décomposer** la déformation en une **expansion** uniforme dans toutes les directions et une **déformation** à volume constant.

2.5) Conditions aux limites

a) Conditions d'entrée et de sortie

Suivant le problème étudié on peut écrire des conditions aux limites portant sur la vitesse **ou** sur la pression.

Conditions portant sur la vitesse :

Sur la section d'entrée le profil de vitesse du fluide peut être connu.

Sur la section de sortie la vitesse est rarement connue (dans ce cas il faut veiller à ce que la conservation de la masse soit vérifiée globalement entre l'entrée et la sortie)

Si la sortie est placée sur une conduite de section constante et suffisamment loin du début de cette conduite, on peut considérer que l'**écoulement est établi**. Cela signifie que le profil des vitesses ne varie plus dans le sens de l'écoulement. Par exemple, s'il s'agit d'une conduite dont l'axe est orienté selon ox (section de sortie perpendiculaire à ox) on pourra se contenter d'écrire :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$$

On peut montrer que dans ce cas la vitesse est orientée selon l'axe de la conduite et que la pression est uniforme sur la section.

Conditions portant sur la pression

Il existe des cas où l'on connaît plutôt la pression sur la section d'entrée et/ou de sortie. Lorsque l'on a affaire à un réservoir de liquide en contact avec un gaz, par exemple, il est commode de placer l'entrée (ou la sortie) juste en dessous de l'interface liquide/gaz où la pression est connue. Si le réservoir est en contact avec l'atmosphère, la pression à la surface libre est connue, elle est égale à la pression atmosphérique.

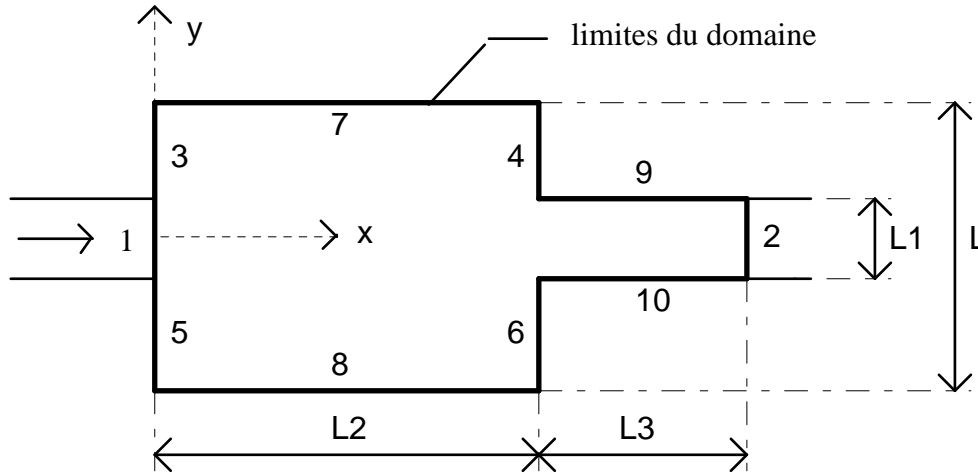
b) Conditions de paroi

Au niveau d'une paroi fixe, pour un fluide visqueux, le vecteur vitesse est nul (condition d'adhérence). Non seulement la composante normale à la paroi, mais également les composantes tangentielles sont nulles. Si la paroi est mobile, la vitesse du fluide est égale à celle de la paroi.

Remarque : dans le cas de l'approximation de fluide parfait (viscosité nulle), le fluide peut glisser sur la paroi, on écrit alors seulement que la vitesse normale à la paroi est nulle : $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

2.6) Combinaison des équations-Adimensionnalisation

Nous allons maintenant combiner les différentes équations dans le cas d'un fluide incompressible ($\rho = \text{cste}$) **newtonien de viscosité constante** ($\mu = \text{cste}$) et de composition uniforme. Prenons l'exemple schématisé ci-dessous et raisonnons en deux dimensions.



2.6.1) Combinaison des équations

a) Intérieur du domaine

conservation de la masse \oplus loi d'état:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \oplus \quad \rho = \text{cste}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{eq.1})$$

conservation de la quantité de mouvement \oplus loi de transfert :

Commençons par exprimer le tenseur des contraintes totales (pression+déformation) dont nous allons avoir besoin dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

fluide visqueux : $\bar{\pi} = p\bar{I} + \bar{\tau} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix}$

fluide newtonien : $\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & 2\frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases} \tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} & \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \pi_{xx} = p - 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} & \pi_{xy} = \pi_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \pi_{yy} = p - 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{cases}$

Nous pouvons exprimer l'équation de conservation de la quantité de mouvement, soit composante par composante, soit vectoriellement . Commençons par la première méthode.

Conservation de la composante selon ox de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v_x \vec{v} + \vec{\pi}_{\cdot x}) = \rho g_x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y} = \rho g_x$$

Remplacement de π_{xx} et π_{yx} par leurs expressions

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} \right) + \rho g_x \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)}_{\text{conservation de la masse}} \right) + \rho g_x \\ \Rightarrow \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + \rho g_x \quad (\text{eq.2}) \end{aligned}$$

En utilisant le vecteur nabla cette équation s'écrit: $\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v_x \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho v \nabla^2 v_x + \rho g_x$

Ecrivons maintenant directement la conservation du **vecteur** quantité de mouvement et combinons la avec la loi de transfert (cf. tableau synthétique des relations sur les opérateurs en fin de polycopié).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + \vec{\pi}) &= \rho \vec{g} \quad \oplus \quad \rho = \text{cste} \quad \oplus \quad \vec{\pi} = p \vec{I} - \rho v (\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) &= -\vec{\nabla} \cdot (p \vec{I}) + \rho v \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) + \rho \vec{g} \\ \text{or } \vec{\nabla} \cdot (p \vec{I}) &= \vec{\nabla} p, \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v})^t = \underbrace{[\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})]}_0 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v}) = \nabla^2 \vec{v} = (\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y) \end{aligned}$$

D'où la forme condensée des équations des 2 composantes de la quantité de mouvement:

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\vec{\nabla} p + \rho v \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v_x \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho v \nabla^2 v_x + \rho g_x \\ \frac{\partial \rho v_y}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v_y \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho v \nabla^2 v_y + \rho g_y \end{cases}$$

Le terme $\nabla^2 v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ encore noté Δv_x représente le Laplacien de v_x

(généralisation en plusieurs dimensions de la dérivée seconde caractéristique de la concavité d'une courbe)

Notez l'analogie avec l'équation de conservation de la masse d'un constituant

$$\frac{\partial \rho \omega_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \omega_i \vec{v}) = \rho D_i \nabla^2 \omega_i + r_i \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v_x \vec{v}) = \rho v \nabla^2 v_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

masse d'un constituant (cf. § 1.6) quantité de mouvement selon ox

Finalement, pour un **fluide incompressible, newtonien de viscosité constante**, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, appelées équations de **Navier-Stokes** s'écrivent :

Forme conservative développée:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + \rho g_x \\ \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y^2)}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) + \rho g_y \end{aligned}$$

Forme conservative condensée

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$

Forme convective développée (obtenue en retranchant l'équation de conservation de la masse multipliée par une composante de la vitesse à l'équation de conservation de cette composante de la quantité de mouvement)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + \rho g_x \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) + \rho g_y \end{aligned}$$

Forme convective condensée

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad \text{avec} \quad \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right)_{\text{cartésien}}$$

Prise en compte des forces de gravité dans le cas d'un fluide incompressible

Si les forces extérieures à distance dérivent d'un potentiel, comme c'est le cas pour la gravité, le terme correspondant peut être combiné avec celui relatif aux forces de pression:

$$\rho \vec{g} = -\rho \vec{\nabla} \Phi = -\rho \vec{\nabla} gz = -\vec{\nabla} \rho gz \text{ pour un fluide incompressible} \quad \vec{\nabla} z = \begin{pmatrix} \partial z / \partial x \\ \partial z / \partial y \\ \partial z / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\vec{\nabla} (p + \rho gz) + \rho \nu \nabla^2 \vec{v}$$

Dans le cas d'un fluide incompressible la pesanteur n'influe pas sur le champ des vitesses si le débit est imposé.

On note $\hat{p} = p + \rho gz$ la **pression motrice** (elle est parfois notée abusivement p)

$$\text{d'où:} \quad \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\vec{\nabla} \hat{p} + \rho \nu \nabla^2 \vec{v}$$

b) conditions aux limites du domaine

Sur la **section d'entrée 1**: la vitesse est connue: $(v_o, 0)$

$$\text{sur S1 (x = 0, } -L1/2 < y < L1/2 \text{): } v_x = v_o \text{ et } v_y = 0 \quad (\text{eq.3})$$

Sur la **section de sortie 2**: la pression motrice est connue, la vitesse est horizontale:

$$\text{sur S2 (x = L2 + L3, } -L1/2 < y < L1/2 \text{): } \hat{p} = \hat{p}_o, v_y = 0 \quad (\text{eq.4})$$

Sur les **parois 3 à 10**, le vecteur vitesse est nul:

$$\text{exemple: sur S3 (x = 0, } L1/2 < y < L/2 \text{): } v_x = 0, v_y = 0 \quad (\text{eq.5})$$

c) Conditions initiales

Nous allons considérer le cas où le fluide est initialement au repos

$$\text{pour } t=0 \text{ (quels que soient x et y): } v_x = v_y = 0 \quad (\text{eq.6})$$

Le problème est ainsi entièrement défini, nous avons combiné

- les équations de **conservation** (masse et quantité de mouvement)
- les équations d'**état** ($\rho = \text{cste}$)
- les lois de **transfert** (fluide newtonien)
- les conditions aux **limites**
- et les conditions **initiales** **dans un cas particulier.**

2.6.2) Adimensionnalisation

Définissons maintenant des **variables sans dimension**:

- les composantes adimensionnelles du vecteur vitesse: $v_x^* = \frac{v_x}{v_0}$, $v_y^* = \frac{v_y}{v_0}$ soit $\vec{v}^* = \vec{v} / v_0$

\vec{v}^* vaut $\vec{0}$ au niveau des parois, et initialement dans tout le domaine

\vec{v}^* vaut (1,0) sur la section d'entrée

- les coordonnées adimensionnelles: $x^* = x / L$, $y^* = y / L$

En effectuant les changements de variables correspondant à cette adimensionnalisation on obtient:

a) Intérieur du domaine

$$\left(\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \right) = 0 \quad (\text{conservation de la masse, eq. 1 multipliée par } L/v_0)$$

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial \left(\frac{v_0 \cdot t}{L} \right)} + \left(\frac{\partial v_x^* v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_x^* v_y^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\partial \left(\frac{\hat{p} - \hat{p}_0}{\rho v_0^2} \right)}{\partial x^*} + \frac{1}{\left(\frac{v_0 \cdot L}{v} \right)} \left(\frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$(\text{conservation de la quantité de mouvement selon } ox, \text{ eq.2 multipliée par } \frac{L}{\rho v_0^2})$$

Par l'analyse dimensionnelle, on voit apparaître un **temps adimensionnel**, où L/v_0 est le temps nécessaire pour parcourir la distance L à la vitesse v_0 .

$$t^* = \frac{v_0 \cdot t}{L} = \frac{t}{L/v_0} \leftarrow \text{temps caractéristique}$$

On voit également apparaître le rapport entre la vitesse à l'entrée v_0 et L/v que l'on appelle **nombre de Reynolds** (cf. nombre de Peclet pour les transferts de matière) et que l'on note Re .

On peut l'interpréter comme le rapport entre un flux convectif de quantité de mouvement (vitesse v_0) et un flux diffusif de quantité de mouvement, c'est à dire une contrainte de cisaillement (gradient de vitesse v_0/L)

$$Re = \frac{v_0 \cdot L}{v} = \frac{\rho \cdot v_0 \cdot v_0}{\rho v (v_0 / L)} = 2 \frac{\frac{1}{2} \rho v_0^2}{\rho v (v_0 / L)} \quad \left(\text{pour un tube circulaire, on prendra le diamètre : } Re = \frac{\rho v D}{\mu} \right)$$

On peut encore considérer que le nombre de Reynolds compare la **pression dynamique**: $1/2 \cdot \rho \cdot v_0^2$ (énergie cinétique par unité de volume) et une contrainte visqueuse de cisaillement.

Enfin on voit que la pression peut être adimensionnalisée par $\rho \cdot v_0^2$ soit le double de la pression dynamique. La variable adimensionnelle correspondante est appelée **nombre d'Euler**.

$$Eu = \frac{\hat{p} - \hat{p}_0}{\rho v_0^2}$$

L'équation de continuité peut se réécrire:

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{soit vectoriellement: } \vec{\nabla}^* \cdot \vec{v}^* = 0 \quad (\text{eq. 1'})$$

où $\vec{\nabla}^*$ représente le vecteur symbolique $\left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial}{\partial y^*} \right)$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement peut se réécrire:

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + \left(\frac{\partial v_x^* v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_x^* v_y^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial(Eu)}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

vectoriellement $\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \vec{\nabla}^* \cdot (\vec{v}^* \vec{v}^*) = -\vec{\nabla}^* (Eu) + \frac{1}{Re} \nabla^2 (\vec{v}^*) \quad (\text{eq. 2'})$

b) Limites du domaine

sur S1 ($x^* = 0, -\frac{L1}{2L} < y^* < \frac{L1}{2L}$) : $v_x^* = 1, v_y^* = 0$ (eq. 3')

sur S2 ($x^* = \frac{L2+L3}{L}, -\frac{L1}{L} < y^* < \frac{L1}{L}$) : $Eu = 0, v_y^* = 0$ (eq. 4')

sur S3 ($x^* = 0, \frac{L1}{L} < y^* < 1$) : $v_x^* = 0, v_y^* = 0$ (similaires pour S4 à S10) (eq. 5')

c) Conditions initiales

pour $t^* = 0$, quels que soient x^* et y^* : $v_x^* = 0, v_y^* = 0$ (eq. 6')

Les équations 1' à 6' décrivent entièrement le système. Elles permettent de calculer l'évolution du champ de la vitesse réduite: \vec{v}^* et de la pression réduite: Eu en fonction d'un **seul paramètre adimensionnel: le nombre de Reynolds** et de la géométrie: $(L1/L)$, $(L2/L)$ et $(L3/L)$.

$$(\vec{v}^*, Eu) = f\{x^*, y^*, t^*, Re, \text{géométrie}\}$$

Remarque:

Pour un écoulement incompressible (à débit imposé), la pression n'intervient qu'au travers de son gradient. Le paramètre p_0 n'influe pas sur le champ des vitesses. Si l'on prend p_0' à la place de p_0 la pression sera juste décalée de $(p_0' - p_0)$ dans tout le domaine.

Contrairement au cas du transport de matière, le problème n'est pas linéaire par rapport à la vitesse, car cette vitesse intervient au carré dans le terme de convection

Si on forme alors la matrice des dimensions formée par les variables, on obtient.

	v_x	v_y	p	x	y	t	L	v_0	ρ	v
m	1	1	-1	1	1	0	1	1	-3	2
s	-1	-1	-2	0	0	1	0	-1	0	-1
kg	0		1	0	0	0	0	0	1	0

Nous avons 10 paramètres dimensionnels et le rang de la matrice des dimensions fondamentales vaut 3 (colonnes L, v_0, ρ par exemples). La forme adimensionnelle de relation fait donc intervenir $(10-3)=7$ paramètres: $(v_x^*, v_y^*, Eu) = f\{x^*, y^*, t^*, Re\}$

2.6.3) Expression des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques

Dans de nombreux cas pratiques on est amené à résoudre les équations de Navier stockes en coordonnées cylindriques.

Le plus souvent (mais pas toujours) on peut considérer a priori une symétrie cylindrique:

$$(\partial p / \partial \theta) = (\partial v_r / \partial \theta) = (\partial v_\theta / \partial \theta) = (\partial v_z / \partial \theta) = 0$$

Cela suppose que la géométrie, les conditions aux limites et les conditions initiales répondent à une symétrie axiale, mais la vitesse tangentielle v_θ peut ne pas être nulle. Les équations se simplifient alors quelque peu:

Hypothèses: symétrie axiale
fluide newtonien
incompressible

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \underbrace{\frac{v_\theta^2}{r}}_{\text{centrifuge}} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right]$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \underbrace{\frac{v_r v_\theta}{r}}_{\text{Coriolis}} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right]$$

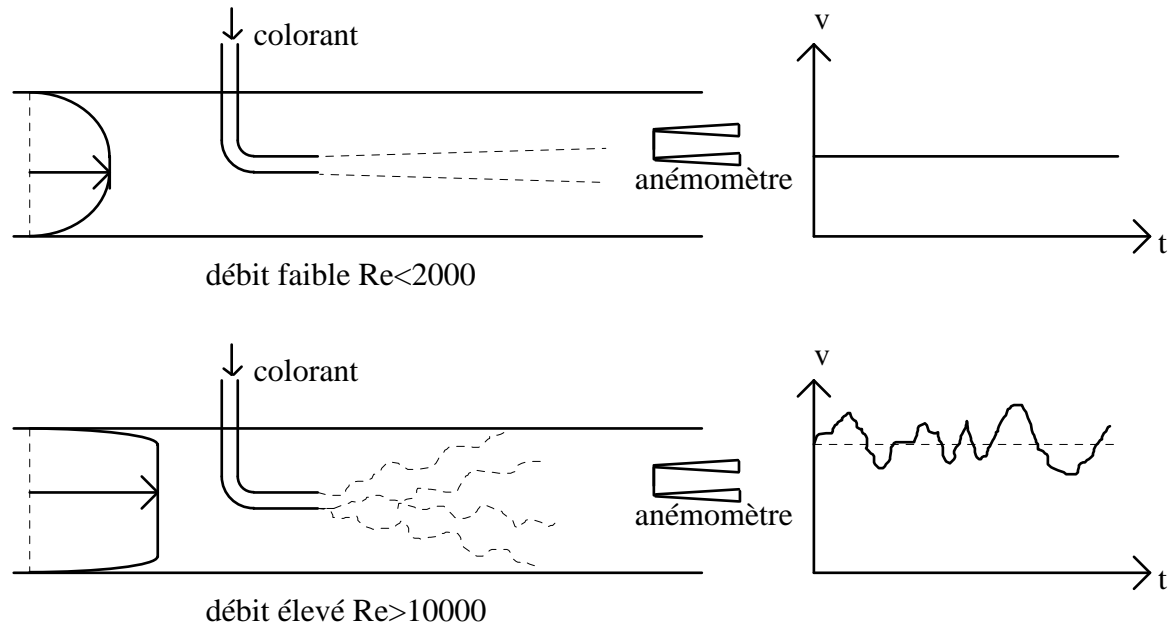
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$$

2.7) Notion de turbulence

When I die and go to the heaven, there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics and the other is turbulence in fluids. And about the former, I am really rather optimistic.

Horace Lamb

Reynolds a effectué une expérience célèbre, maintes fois renouvelée schématisée ci-dessous:



On opère avec des **conditions aux limites quasiment permanentes**, le débit est fixé à l'entrée et la pression est maintenue constante à l'aval.

Lorsque le nombre de Reynolds est faible, la vitesse est orientée suivant l'axe du tube, le profil des vitesses est parabolique comme l'indique le calcul (effectué en régime permanent), le colorant suit un filet fluide quasiment rectiligne comme on s'y attend puisque la vitesse radiale est nulle (il se disperse très légèrement du fait de la diffusivité moléculaire). Si on mesure la vitesse en un point avec un anémomètre à réponse rapide ⁸, on observe que la vitesse est constante dans le temps: l'écoulement est dit **laminaire**.

Lorsque le nombre de Reynolds est élevé, la vitesse est en moyenne orientée selon l'axe du tube, mais le profil n'est plus parabolique (il est presque plat), le colorant diffuse très rapidement comme si les trajectoires des particules de colorant étaient aléatoires et en tout cas beaucoup plus rapidement que ne laissent prévoir les équations de transport par diffusion moléculaire. Si on mesure la vitesse instantanée en un point, on constate qu'elle fluctue autour d'une moyenne, **le régime d'écoulement est donc transitoire !** L'écoulement est dit **turbulent**.

Dans la pratique, pour une conduite circulaire, l'écoulement est toujours laminaire pour $Re = v_d \cdot D / \nu < 2000$, il est presque toujours turbulent pour $Re > 10000$ (pour des installations industrielles on considère généralement que l'écoulement est turbulent à partir de $Re = 4000$). (on utilise dans la définition de Re , la vitesse débitante: v_d qui est le débit divisé par la section)

⁸ Une telle mesure peut être faite par exemple avec un anémomètre à fil chaud. Un fil de platine de 5 microns de diamètre est traversé par un courant électrique, il va donc dissiper la chaleur produite par effet Joule dans le fluide. Pour une puissance donnée sa température sera d'autant plus élevée que la vitesse du fluide est faible. La résistivité électrique du platine varie avec la température, en mesurant la résistance on peut donc connaître la température du fil.

Dans le cas d'un écoulement turbulent, on décompose la vitesse en une composante moyenne et une composante aléatoire:

$$v_x = \bar{v}_x + v_x', v_y = \bar{v}_y + v_y' \quad \text{soit vectoriellement; } \vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}'$$

On peut alors réécrire les équations de Navier-Stokes et les moyenner dans le temps. Pour un écoulement permanent en moyenne d'un fluide newtonien incompressible, on peut écrire (quantité de mouvement dans la direction ox)

$$\frac{\partial \rho(\bar{v}_x + v_x')}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho(\bar{v}_x + v_x')(\bar{v}_x + v_x')}{\partial x} + \frac{\partial \rho(\bar{v}_x + v_x')(\bar{v}_y + v_y')}{\partial y} \right) = -\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} + \rho \nu \left(\frac{\partial^2(\bar{v}_x + v_x')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{v}_x + v_x')}{\partial y^2} \right) + \rho g_x$$

On utilise alors les propriétés de linéarité :

- la moyenne de la dérivée est égale à la dérivée de la moyenne : $\overline{\partial(\bar{p} + p') / \partial x} = \partial(\overline{\bar{p} + p'}) / \partial x$
- la moyenne d'une somme est égale à la somme des moyennes : $\overline{(\bar{p} + p')} = \bar{p} + \bar{p}' = \bar{p} + 0$

On obtient ainsi une équation qui porte sur la vitesse moyenne qui ressemble beaucoup à l'équation en l'absence de fluctuations de vitesse (Navier-Stokes en régime permanent laminaire) mais comportant un terme supplémentaire qui provient du fait que :

- la moyenne d'un produit n'est pas égale au produit des moyennes $\overline{(\bar{v}_x + v_x')(\bar{v}_y + v_y')} = \bar{v}_x \cdot \bar{v}_y + \overline{v_x' \cdot v_y'}$

C'est cette non-linéarité qui explique l'effet papillon en météorologie : un battement d'aile d'un papillon peut engendrer un cyclone (les fluctuations de vitesse ont une influence non négligeable sur le mouvement moyen).

$$\left(\frac{\partial \rho \bar{v}_x \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v}_x \bar{v}_y}{\partial y} \right) + \underbrace{\left(\frac{\partial \rho \overline{v_x' v_x'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{v_x' v_y'}}{\partial y} \right)}_{\text{terme supplémentaire}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \right) + \rho g_x$$

Le terme supplémentaire fait intervenir la variance de v_x' et la covariance de v_x' et v_y' . La matrice de covariance des fluctuations de vitesse multipliée par la masse volumique est appelée tenseur des contraintes de Reynolds. Les composantes de cette matrice ont la dimension d'une densité de flux de quantité de mouvement c'est à dire d'une contrainte (Pa). Ces contraintes sont dues à l'agitation turbulente (à l'échelle des tourbillons), de même que les contraintes visqueuses sont dues à l'agitation thermique (à l'échelle moléculaire):

$$\text{Tenseur des contraintes de Reynolds: } \overline{\rho \vec{v}' \vec{v}'} = \rho \begin{pmatrix} \overline{v_x' v_x'} & \overline{v_x' v_y'} \\ \overline{v_y' v_x'} & \overline{v_y' v_y'} \end{pmatrix}$$

Les équations du mouvement moyen s'écrivent alors sous forme condensée :

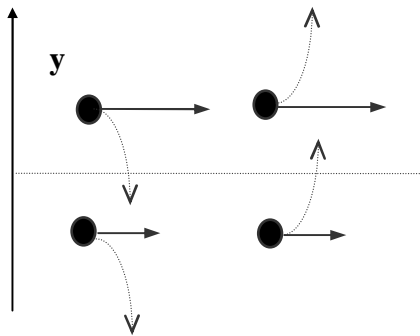
$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\vec{v}} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\rho \bar{\vec{v}' \vec{v}'}) = -\vec{\nabla} \bar{p} + \rho \nu \nabla^2 \bar{\vec{v}} - \vec{\nabla} \cdot (\rho \overline{\vec{v}' \vec{v}'}) + \rho \vec{g}$$

Pour traduire les flux de quantité de mouvement dus au mouvement turbulent, on utilise le plus souvent la notion de viscosité turbulente. Ainsi par analogie on écrira :

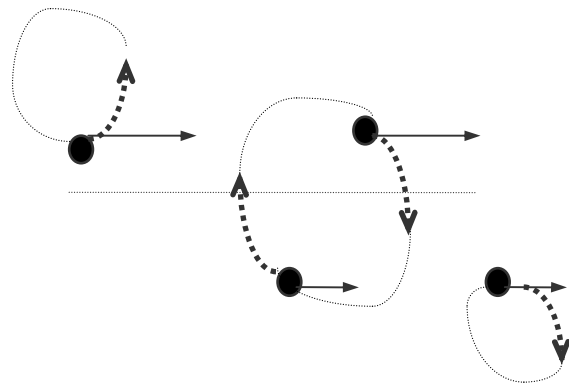
$$\begin{array}{ll} \tau_{xy} = -\rho v \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \xrightarrow{\text{analogie}} \quad \rho \overline{v'_x v'_y} = -\rho v_t \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{xx} = -2\rho v \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) & \xrightarrow{\text{analogie}} \quad \rho \overline{v'_x v'_x} = -2\rho v_t \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \\ \bar{\tau} = -\rho v (\bar{\nabla} \bar{v} + (\bar{\nabla} \bar{v})^t) & \xrightarrow{\text{analogie}} \quad \rho \overline{\bar{v}' \bar{v}'} = -\rho v_t (\bar{\nabla} \bar{v} + (\bar{\nabla} \bar{v})^t) \end{array}$$

v : viscosité cinématique moléculaire (ou laminaire) v_t : viscosité cinématique turbulente

Contrainte visqueuse : agitation moléculaire



Contrainte turbulente : fluctuation de vitesse



En adoptant un modèle de viscosité turbulente, tout se passe comme si on pouvait utiliser, en écoulement turbulent, les équations de Navier Stokes en régime permanent en remplaçant la viscosité par la somme de la viscosité moléculaire et de la viscosité turbulente.

$$v : \text{laminaire} \quad \rightarrow \quad (v + v_t) : \text{turbulent}$$

$$\bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{\nabla} \bar{v}) = -\bar{\nabla} \bar{p} + \rho \bar{\nabla} \cdot \left[(v + v_t) (\bar{\nabla} \bar{v} + (\bar{\nabla} \bar{v})^t) \right] + \rho \bar{g} \quad \bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0$$

Il faut remarquer que dans ce cas v_t dépend de l'écoulement local. Ce n'est pas uniquement une caractéristique du fluide comme v . Toute la difficulté consiste à modéliser alors la viscosité turbulente, ceci sort du cadre de ce cours.

La forme adimensionnelle des équations de Reynolds s'écrit :

$$\text{Re} \cdot \bar{\nabla}^* \cdot (\bar{\nabla}^* \bar{v}^*) = -\text{Re} \cdot \bar{\nabla}^* \text{Eu} + \nabla^2 \bar{v}^* - \text{Re} \cdot \bar{\nabla}^* \cdot (\bar{v}'^* \bar{v}'^*) \quad \bar{\nabla}^* \cdot \bar{v}^* = 0$$

On voit que l'importance relative de la turbulence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds est élevé. C'est l'inertie du fluide qui provoque la turbulence, par contre les frottements visqueux l'amortissent. Le nombre de Reynolds compare l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique volumique : $1/2 \rho v_0^2$ et l'ordre de grandeur des contraintes visqueuses : $\rho v \cdot v_0 / L$, il est donc un bon indicateur du type d'écoulement (laminaire ou turbulent).

2.8) Equations du mouvement pour un fluide parfait ⁹

Un fluide est dit parfait si les forces visqueuses peuvent être considérées comme négligeables devant les forces d'inertie¹⁰. Dans ce cas, les contraintes totales se réduisent aux contraintes de pression. L'expression de la conservation de la quantité de mouvement sur un élément de masse fixe suivi dans son mouvement s'écrit alors ¹¹ :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} + \rho \vec{g} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}$$

Masse volumique constante / Forces à distance = gravité

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}(p + \rho gz)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} \left(p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz \right)$$

Projetons cette équation sur une ligne de courant pour un **écoulement permanent** (la projection se traduit par un produit scalaire avec le vecteur vitesse)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \left(p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz \right) \cdot \vec{v} = 0$$

Pour un **écoulement permanent** d'un **fluide parfait**, la charge reste constante le long d'une **ligne de courant**.

Si l'**écoulement est permanent et irrotationnel** ($\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0$), la charge est constante dans tout l'écoulement.

Si l'écoulement est **irrotationnel**, on peut démontrer que le champ des vitesses dérive d'un potentiel: $\vec{v} = \vec{\nabla} \Psi$. La conservation de la masse s'écrit alors $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Psi) = \nabla^2 \Psi = 0$. Il suffit dans ce cas, de trouver une fonction Ψ de Laplacien nul qui vérifie les conditions aux limites.

Masse volumique fonction de la pression / Forces à distances dérivant d'un potentiel Φ

La relation précédente se généralise sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} = -\vec{\nabla} \left(\left(\int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')} \right) + \frac{v^2}{2} + \Phi \right) \quad \text{par exemple } \Phi = gz$$

⁹ Rappel : un fluide parfait étant sans frottement, sa vitesse tangentielle le long d'une paroi n'est, a priori, pas nulle (la condition aux limites d'adhérence n'est pas remplie). Par contre la vitesse normale à la paroi est nulle.

¹⁰ On devrait plutôt parler d'écoulement parfait de fluide. L'hypothèse négligeant les forces visqueuses est plus ou moins vérifiée pour tel ou tel type d'écoulement (pour des Reynolds élevés). Selon le cas, l'eau ou l'air peuvent être considérés comme fluide parfait ou fluide visqueux.

¹¹ En développant on obtient les équations d'Euler (voir équations de Navier Stokes avec $\mu=0$)

2.9) Bilan de quantité de mouvement sur un système macroscopique ouvert

Pour effectuer le bilan des forces sur le fluide qui traverse un système ouvert, il suffit d'effectuer une intégration sur le volume considéré. Pour cela on utilise, comme au paragraphe 1.7, la formule de Leibnitz et le théorème d'Ostrogradskii. Pour la résultante, on obtient¹²:

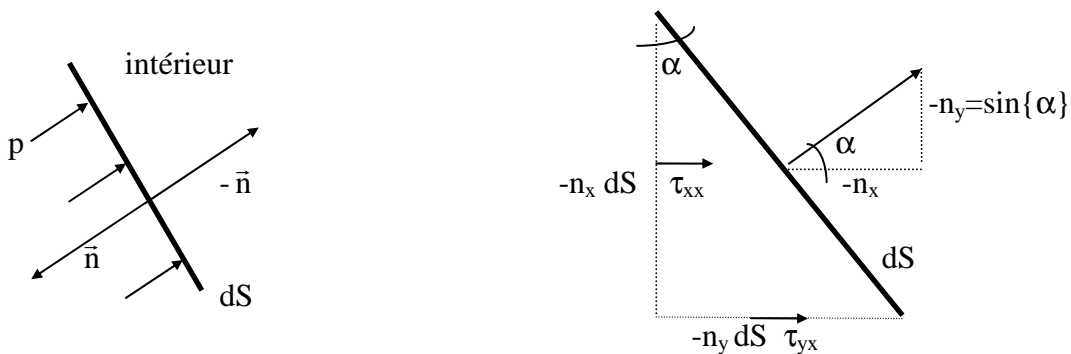
$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_x dV + \int_S \rho v_x (\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS = - \int_S p \vec{n} \cdot \vec{e}_x dS - \int_S \vec{\tau}_x \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho g_x dV$					
$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV + \int_S \rho (\vec{v}(\vec{v} - \vec{v}_s)) \cdot \vec{n} dS = - \int_S p \vec{n} dS - \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho \vec{g} dV$					
accumulation	bilan des flux convectifs	contraintes de pression	contraintes visqueuses	forces extérieures à distance	
		résultantes des forces extérieures			

Le terme $\rho(\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS$ représente le flux de matière (masse totale) sortant à travers une section élémentaire dS de vecteur normal unitaire extérieur \vec{n} (cf. § 1.7.1). Le terme $\rho \vec{v}(\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS$ représente le flux de quantité de mouvement transporté par ce flux de matière (flux convectif). Cette expression est similaire à celle du flux convectif du constituant i obtenue au § 1.7.2 : $\rho \omega_i (\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS$.

Les termes $(-p \vec{n} dS)$ et $(-\vec{\tau} \cdot \vec{n} dS)$ représentent la force de pression et la force visqueuse exercée *sur* le fluide contenu dans le système à travers une section élémentaire $\vec{n} dS$.

Si l'on s'intéresse à la composante selon ox de la force visqueuse à travers une paroi inclinée (figure de droite ci-dessous) on peut faire un bilan sur les faces du triangle rectangle correspondant. La face horizontale (\perp à oy) a une surface égale à $(-n_y dS)$. Pour avoir la force dans la direction ox , on multiplie cette surface par la contrainte τ_{yx} . On fait de même pour la surface verticale et on prend la somme, on obtient alors : $-(\tau_{xx} \cdot n_x + \tau_{yx} \cdot n_y) dS$, c'est à dire la composante selon x de $-\vec{\tau} \cdot \vec{n} dS$.

$$\text{en effet : } -\vec{\tau} \cdot \vec{n} dS = - \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} dS = \begin{pmatrix} -(\tau_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y) dS \\ -(\tau_{yx} n_x + \tau_{yy} n_y) dS \end{pmatrix}$$

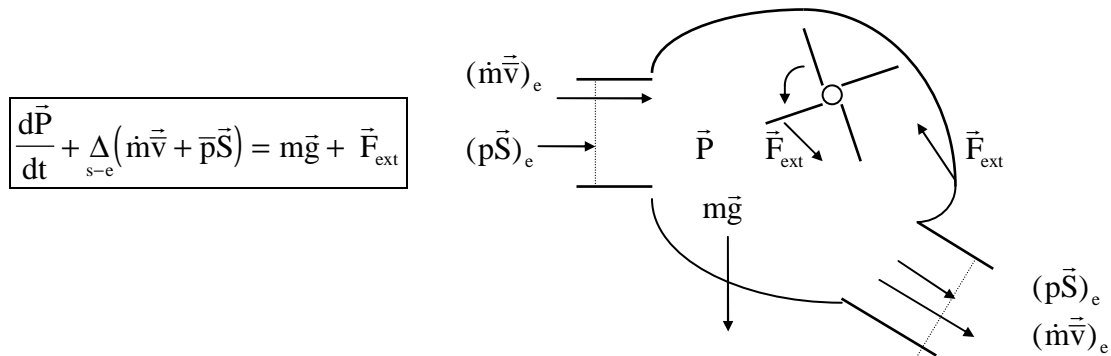


¹² Le système peut avoir des frontières mobiles se déplaçant à la vitesse \vec{v}_s

On peut écrire également une relation équivalente pour le moment par rapport à un point 0. Ce point peut ne pas appartenir au domaine. Pour écrire le moment par rapport à un axe passant par 0, il suffit de projeter la relation sur l'axe, c'est à dire la multiplier scalairement par le vecteur unitaire de l'axe.

$\frac{d}{dt} \int_V \rho (\vec{x} \wedge \vec{v}) dV + \int_S \rho ((\vec{x} \wedge \vec{v})(\vec{v} - \vec{v}_s)) \cdot \vec{n} dS = - \int_S p (\vec{x} \wedge \vec{n}) dS - \int_S \vec{x} \wedge (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS + \int_V \rho (\vec{x} \wedge \vec{g}) dV$
<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> accumulation bilan des flux convectifs contraintes de pression contraintes visqueuses forces extérieures à distance </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> moment des forces extérieures </div>

Pour un système ayant **une** section d'entrée et **une** section de sortie et en négligeant les contraintes visqueuses sur ces sections on obtient ainsi le théorème d'Euler :



\vec{P} est la quantité de mouvement du fluide contenu dans le domaine: $\vec{P} = \int_V \rho \vec{v} dV$

\vec{v} est la vitesse de mélange: $\vec{v} = \frac{\int_S \rho \vec{v} ((\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n}) dS}{\dot{m}}$

- si la section d'entrée est fixe, si la direction de la vitesse est identique sur toute la section d'entrée et que p est uniforme sur cette section, alors \vec{v}_e est le vecteur orienté selon cette direction et de norme égale à $\frac{\int_S v^2 dS}{\int_S v dS}$
- si la vitesse est uniforme, on a simplement: $\vec{v} = \vec{v}$

\vec{S}_e est le vecteur de norme égale à la section d'entrée, normal à cette section et orienté dans le sens du flux.

\bar{p}_e est la moyenne surfacique de p sur la section d'entrée (qui est en général uniforme)

\vec{F}_{ext} est la résultante des forces (sauf celles dues à la gravité et à la pression sur les sections d'entrée et de sortie), il s'agit typiquement des forces exercées par les parois fixes ou mobiles (pales d'une pompe par exemple) du système sur le fluide qu'il contient.

Pour un système ayant **une** section d'entrée et **une** section de sortie, en négligeant les contraintes visqueuses (flux diffusifs) sur les sections d'entrée et de sortie et si la vitesse, la pression et la masse volumique sont uniformes sur chacune des sections d'entrée et de sortie:

$$\frac{d\vec{\Pi}_0}{dt} + \Delta_{s-e} (\dot{m}(\vec{x} \wedge \vec{v}) + p(\vec{x} \wedge \vec{S})) = m(\overrightarrow{0M_g} \wedge \vec{g}) + \vec{M}_{0,ext}$$

$\vec{\Pi}_0$ est le moment par rapport à 0, de la quantité de mouvement du fluide contenu dans le domaine:

$$\vec{\Pi}_0 = \int_V \rho(\vec{x} \wedge \vec{v}) dV \quad (\vec{x} \text{ est le vecteur qui relie 0 au point considéré du domaine})$$

\vec{v}_e est la vitesse (supposée uniforme) sur la section d'entrée

\vec{x}_e est le vecteur qui relie 0 au centre de la section d'entrée

(on suppose que $|\vec{x}_e|$ est grand devant les dimensions de la section d'entrée)

M_g est le centre de gravité du fluide contenu dans le système

$\vec{M}_{0,ext}$ est le moment par rapport à 0 des forces extérieures (sauf celles dues à la gravité et à la pression sur les sections d'entrée et de sortie)

Pour un système tournant autour d'un axe (passant par O), on projetera cette équation sur le vecteur unitaire de cet axe (si l'axe est vertical, cela revient à prendre la composante selon z de l'équation)

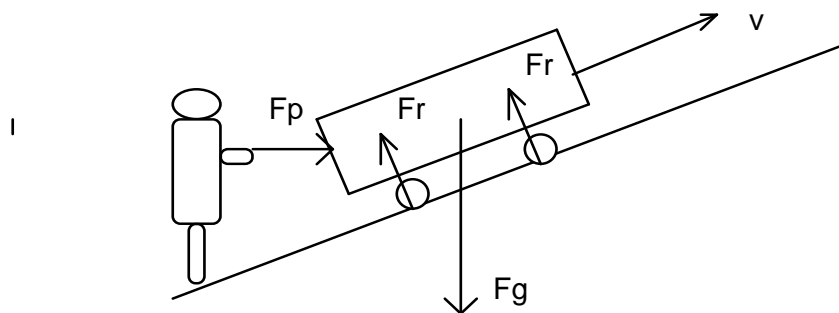
2.10) Bilan d'énergie mécanique sur un élément de volume fixe

En mécanique du point matériel le travail (resp. la puissance) d'une force est égale au produit (scalaire) de la force et du déplacement (resp. de la vitesse).

Exemple:

Si un wagonnet monte une côte à vitesse constante ($d(mv)/dt = 0$) alors les forces extérieures (réaction des rails: F_r , forces de poussée: F_p et forces de gravité: F_g) s'équilibrent. La puissance de la force de poussée est égale à:

$$\dot{W}_p = \vec{F}_p \cdot \vec{v}$$



De la même façon, pour obtenir les puissances des différentes forces exercées sur un fluide, nous multiplions scalairement l'équation de quantité de mouvement par le vecteur vitesse. Nous supposons que les seules forces à distance sont celles de gravité.

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v})) = \rho \vec{v} \cdot \vec{g} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}) \quad \text{et} \quad \vec{g} = -\vec{\nabla} g_z$$

$$\left(v_x \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + v_y \frac{\partial \rho v_y}{\partial t} \right) + \left(v_x \left(\frac{\partial (\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y v_x)}{\partial y} \right) + v_y \left(\frac{\partial (\rho v_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y v_y)}{\partial y} \right) \right) =$$

$$+ \rho (g_x v_x + g_y v_y) - \left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \left(v_x \left(\frac{\partial (\rho \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \tau_{yx})}{\partial y} \right) + v_y \left(\frac{\partial (\rho \tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \tau_{yy})}{\partial y} \right) \right)$$

Après un calcul fastidieux mais qui peut être traité de façon élémentaire on obtient une équation de bilan sur un élément de volume fixe dans l'espace de l'énergie mécanique (cinétique et potentielle de gravité) ¹³.

$\frac{\partial (\frac{1}{2} \rho v^2)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v})$	accumulation et bilan (s - e) des flux convectifs d'énergie cinétique
$+ \frac{\partial (\rho g z)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho g z \vec{v})$	accumulation et bilan (s - e) des flux convectifs d'énergie potentielle
$= (- \vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}))$	<p>puissance fournie (par unité de volume) par les forces de pression</p> <p>(pour un fluide incompressible, la pression peut être considérée comme une énergie par unité de volume, ce terme représente alors le bilan (e - s) des flux convectifs "d'énergie de pression")</p>
$- (p (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}))$	<p>flux d'énergie mécanique convertie de façon réversible en énergie interne</p> <p>(par unité de volume) (terme nul pour les fluides incompressibles)</p>
$+ (- \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}))$	puissance fournie (par unité de volume) par les forces visqueuses
$- (\vec{\tau} : (\vec{\nabla} \vec{v}))$	<p>flux d'énergie mécanique convertie de façon irréversible en énergie interne</p> <p>(par unité de volume) : dissipation sous forme de chaleur</p> <p>(d'après le second principe de la thermodynamique ce terme est toujours positif)</p>

Cette équation n'est pas une équation fondamentale mais a été dérivée des précédentes.

¹³ L'équation peut être généralisée dans la mesure où les forces volumiques dérivent d'un potentiel constant dans le temps (forces électrostatiques, forces centrifuges, etc. en plus de la force de gravité)

2.11) Bilan d'énergie mécanique sur un domaine macroscopique

Nous allons maintenant écrire le bilan d'énergie mécanique pour un fluide traversant un système macroscopique.

- en **régime permanent**: $\partial/\partial t=0$
 - pour un **fluide incompressible**: $\rho=\text{cst} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$
 - lorsque les **forces sont celles de gravité** (elles dérivent d'un potentiel)¹⁴ : $\vec{g} = -\vec{\nabla}gz$
 - en négligeant la puissance des forces visqueuses sur les sections d'entrée et de sortie
 - **sans apport d'énergie mécanique**: $\dot{W} = 0$
- (il n'y a pas de pièces en mouvement dans le fluide comme ce serait le cas dans une pompe par ex.)

En intégrant l'équation du paragraphe précédent sur le volume de fluide contenu dans le système, on a:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + gz \right) \vec{v} \right) dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}) dV - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) dV - \int_V (-\vec{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v}) dV$$

En utilisant le théorème de Gauss Ostrogradskii, on obtient

$$\int_S \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + gz \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS - \int_S (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS - \int_V (-\vec{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v}) dV$$

La vitesse est nulle sur les parois et on suppose que $(\vec{\tau} \cdot \vec{v})$ est négligeable sur les sections d'entrée - sortie (assez bien vérifié en général), d'où:

$$\int_{S_e+S_s} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz + p \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_V (-\vec{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v}) dV$$

Si par ailleurs on apporte une puissance mécanique \dot{W}_{ext} au fluide contenu dans le système (par l'intermédiaire de parois mobiles : pales d'une pompe par exemple), alors:

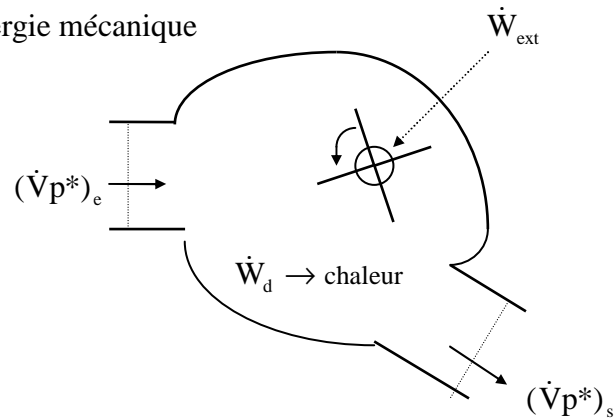
$\int_{S_e+S_s} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz + p \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$	$=$	$- \int_V (-\vec{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v}) dV$	$+$	\dot{W}_{ext}
bilan des flux d'énergie		énergie mécanique dissipée		énergie mécanique
cinétique, potentielle		en chaleur du fait des		effectivement apportée
et de pression		frottements visqueux		au fluide contenu dans
(sortie - entrée)		(terme toujours négatif)		le système

régime permanent, fluide incompressible

¹⁴ Il suffit en fait que les forces à distance dérivent d'un potentiel constant dans le temps ($\Phi \leftrightarrow gz$)

On peut écrire de façon simple le bilan d'énergie mécanique

- pour un système à une entrée et une sortie
- **en régime permanent**
- **pour un fluide incompressible**
- lorsque les forces volumiques se résument à la gravité
- si sur la section d'entrée et de sortie la pression motrice $p + \rho g z$ est uniforme



$$\Delta_{s-e}(\dot{V} \cdot p^*) = \dot{W}_{ext} - \dot{W}_d \quad \text{avec} \quad p^* = p + \frac{1}{2} \rho \overline{v^2} + \rho g z : \text{charge} = \text{énergie mécanique par unité de volume}$$

\dot{W}_{ext} est l'énergie mécanique apportée au fluide contenu dans le système par unité de temps :
(puissance des forces extérieures sauf celles de gravité et de pression sur les entrée-sortie, typiquement il s'agit de la puissance des forces exercées par les pales d'une pompe par ex.)

\dot{W}_d est l'énergie mécanique dissipée en chaleur par unité de temps du fait des frottements visqueux dans le fluide contenu dans le système.

$\frac{1}{2} \overline{v^2}$ est l'énergie cinétique (par unité de masse) de mélange: $\frac{1}{2} \overline{v^2} = \int_{s^2} \frac{1}{2} \rho v^2 (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS / \dot{m}$

- si sur chacune des sections d'entrée et de sortie la vitesse possède une direction

uniforme, alors: $\overline{v^2} = \int_s v^3 dS / \int_s v dS$

- si la vitesse est uniforme, on a simplement: $\overline{v^2} = v^2$

Nous exprimons ici la **charge** : $p^* = p + \frac{1}{2} \rho \overline{v^2} + \rho g z$ en Pascal, mais certains auteurs la divisent par ρg et obtiennent ainsi une expression homogène à une hauteur. Elle représente la **somme des énergies cinétiques, potentielles et de pression**¹⁵ par unité de volume.

Si l'on peut négliger les frottements visqueux (hypothèse des fluides parfaits), la charge reste donc constante au travers d'un système ou le long d'un tube de courant (hyp. $\partial/\partial t=0$, $\rho=cst$, $\dot{W}_{ext}=0$)

L'expression précédente peut être généralisée au cas où la masse volumique n'est pas constante mais dépend seulement de la pression, et pour d'autres énergies potentielles que celle de gravité, on raisonne alors par unité de masse:

$$\Delta_{s-e} \left(\frac{1}{2} \overline{v^2} + \Phi \right) + \int_e^s \frac{dp}{\rho} = \frac{\dot{W}_{ext}}{\dot{m}} - \frac{\dot{W}_d}{\dot{m}} \quad (\text{régime permanent}) \quad \text{exemple : } \Phi = g z$$

Pour un fluide newtonien, on peut expliciter l'énergie mécanique dissipée en chaleur par l'intermédiaire des forces visqueuses. Peu importe pour nous cette expression, retenons simplement qu'il est possible de la calculer.

$$\dot{W}_d = \int_V (-\vec{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v}) dV = \rho \nu \int_V \left((\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) : \vec{\nabla} \vec{v} \right) dV = \rho \nu \int_V \Phi_d dV$$

$$\text{avec } \Phi_d = 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right]^2$$

¹⁵ Ce n'est que pour un fluide incompressible que l'on peut assimiler la pression à une énergie par unité de volume

En régime permanent et pour une masse volumique constante (hypotheses énoncées précédemment) on a : $\dot{V}_e = \dot{V}_s = \dot{V}$. On peut donc diviser l'expression du bilan d'énergie mécanique par le débit volumique :

$$p_s^* - p_e^* = (\dot{W}_{\text{ext}} / \dot{V}) - (\dot{W}_d / \dot{V}) \quad \text{en } \text{J.m}^{-3} = \text{Pa}$$

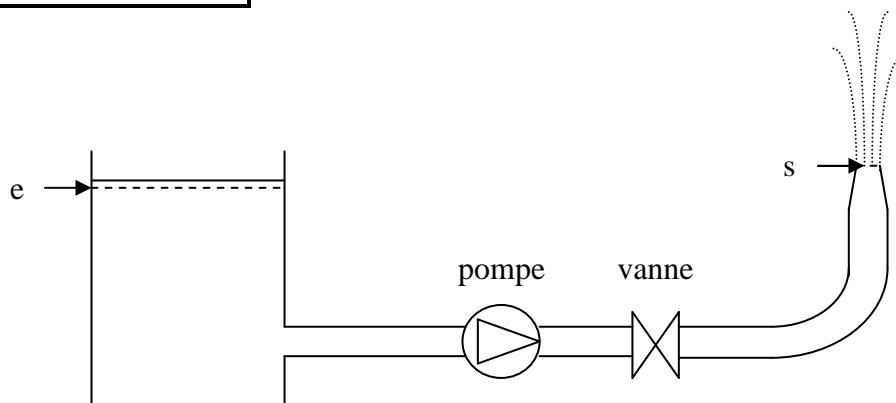
$p_s^* - p_e^*$ est la variation de l'énergie mécanique par unité de volume du fluide entre l'entrée et la sortie du système

$\dot{W}_{\text{ext}} / \dot{V}$ représente l'énergie mécanique apportée effectivement¹⁶ au fluide par unité de volume au niveau d'une **pompe** ou d'un ventilateur par exemple

\dot{W}_d / \dot{V} représente la dissipation d'énergie mécanique par unité de volume traversant le système du fait des frottements dans les tuyauteries d'un **circuit** par exemple, ce terme est appelée **perte de charge**

Si le système considéré est un **circuit ouvert** comprenant des tuyauteries, des coudes, des vannes etc. et éventuellement une **pompe** ou un ventilateur, on peut écrire :

$$p_s^* - p_e^* = \Delta p_{\text{pompe}}^* - \Delta p_{\text{circuit}}^*$$



$p_s^* - p_e^*$ est la variation de l'énergie mécanique (par unité de volume) du fluide entre l'entrée et la sortie du système

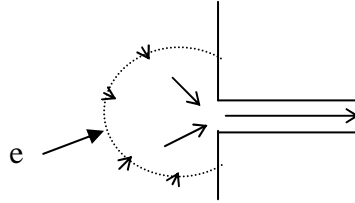
$\Delta p_{\text{pompe}}^*$ est l'énergie mécanique nette apportée par la pompe au fluide par unité de volume, ce terme est appelé **élévation manométrique de la pompe**

$\Delta p_{\text{circuit}}^*$ est l'énergie mécanique dissipée en chaleur du fait des frottements dans les différents éléments du circuit (par unité de volume de fluide traversant le circuit), ce terme est appelé **perte de charge du circuit**

L'équation de bilan signifie simplement que la variation d'énergie mécanique entre l'entrée et la sortie du système est égale à l'énergie mécanique apportée diminuée de l'énergie mécanique dissipée par frottement

¹⁶ Une partie de l'énergie apportée au niveau de l'arbre d'une pompe peut être dissipée en chaleur dans les roulements et les joints

Dans l'application de tout bilan, c'est à vous de définir les limites du système, sachant que vous aurez à calculer ou exprimer certaines grandeurs aux frontières du système. Pour un bac de lancement (resp. de réception), il est souvent commode de choisir comme entrée du système (resp. comme sortie) un plan horizontal situé juste en-dessous du niveau du liquide car il est facile d'y exprimer la charge (cf. schéma ci-dessus). Une alternative consiste à considérer une frontière située juste avant le rétrécissement (resp. juste après l'élargissement) où l'énergie cinétique du fluide peut encore être considérée comme négligeable (cf. schéma ci-dessous).

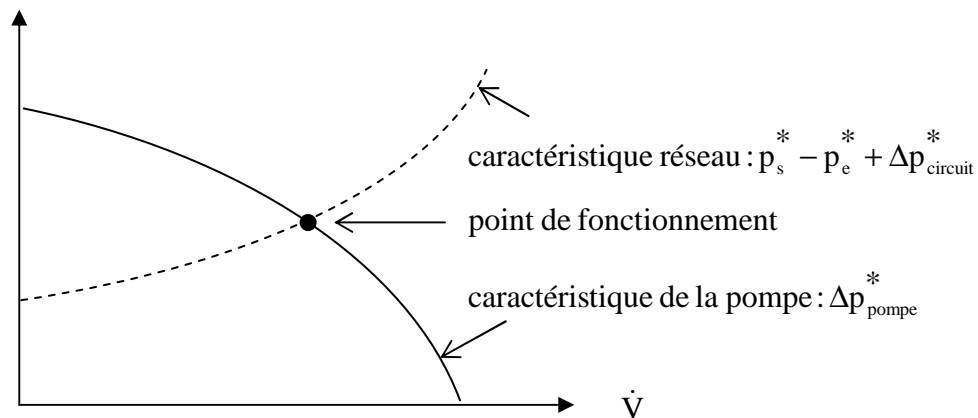


Remarque: $\Delta p_{\text{pompe}}^*$ est la variation de la charge (énergie mécanique par unité de volume) entre l'entrée et la sortie de la pompe, il s'agit de l'énergie mécanique transmise au fluide par les pales diminuée de la dissipation d'énergie mécanique par frottement visqueux à l'intérieur de la pompe. La puissance utile de la pompe (puissance mécanique nette transmise au fluide) est simplement égale à $\dot{V} \cdot \Delta p_{\text{pompe}}^*$

Le bilan d'énergie mécanique sur un **circuit ouvert** peut encore s'écrire :

$$\underset{\text{caractéristique}}{\Delta p_{\text{pompe}}^*} = \underset{\text{caractéristique}}{p_s^* - p_e^*} + \Delta p_{\text{circuit}}^*$$

Ceci peut se représenter graphiquement en faisant apparaître le point de fonctionnement comme l'intersection de la caractéristique de la pompe et de la caractéristique du réseau qui dépendent tous deux du débit :



Le cas des **circuits fermés** peut être considéré comme un cas particulier où l'entrée et la sortie sont confondues en un point du circuit, dans ce cas on a donc

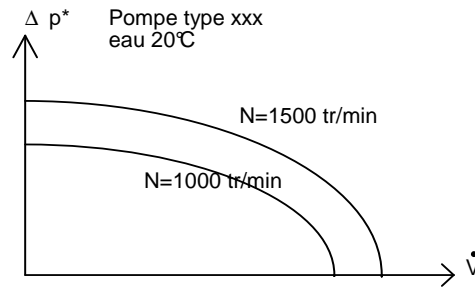
$$\Delta p_{\text{pompe}}^* = \Delta p_{\text{circuit}}^*$$

Ceci signifie que l'énergie mécanique apportée au niveau de la pompe compense la dissipation par frottement dans le circuit.

2.12) Caractéristique des pompes et ventilateurs

La caractéristique essentielle d'une pompe est la relation qui lie (pour un fluide et une température donnée: v, ρ fixés) l'augmentation de la charge entre l'entrée et la sortie (appelée élévation manométrique) au débit de fluide; ceci en fonction de la vitesse de rotation. On peut écrire:

$$\Delta p_{\text{pompe}}^* = f\{\dot{V}, \dot{N}, \rho, v, D\} \quad \frac{\Delta p_{\text{pompe}}^*}{\rho \dot{N}^2 D^2} = f\left\{\frac{\dot{V}}{\dot{N} D^3}, \frac{\rho \dot{N} D^2}{\mu}\right\}$$



2.13) Calcul des pertes de charge

Pour calculer les pressions, les débits ou les puissances mécaniques pour un système donné, il reste à pouvoir calculer les pertes de charges notée simplement Δp^* dans ce paragraphe. On distingue deux cas:

- **Pertes de charge linéaires**

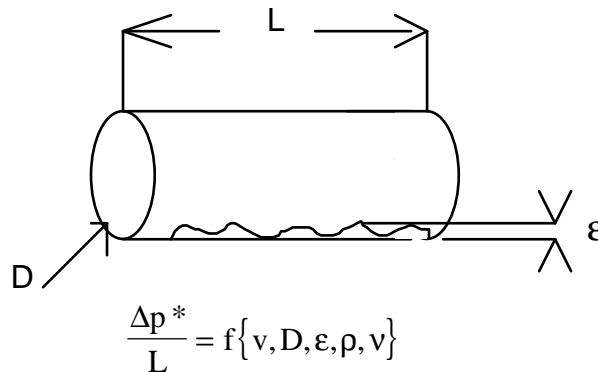
Le fluide s'écoule dans une direction donnée, à travers une section constante et avec un profil de vitesse constant (établi). Exemple: tronçon de tuyauterie. Dans ce cas la perte de charge varie proportionnellement (de façon linéaire) avec la longueur de l'élément: L.

- **Pertes de charge singulières**

Exemple: coude, élargissement, rétrécissement, vannes...

a) Pertes de charge linéaires

La perte de charge par unité de longueur dépend de 5 variables (et de la géométrie du canal)



on note pour simplifier v la vitesse débitante: $v = \dot{V} / S$

ε est la rugosité du tuyau (hauteur moyenne des aspérités)

Trois unités fondamentales sont en jeu (kg,m,s), l'analyse dimensionnelle montre alors que la relation précédente (reliant 6 variables dimensionnelles) peut être simplifiée en une relation entre 3 nombres sans dimension. ($\Delta p^*/L$ est considéré comme une seule variable)

$$\left(\begin{array}{c} \text{coeff.de.perte.de} \\ \text{charge.lineaire} \end{array} \right) = f \left\{ \begin{array}{c} \text{nombre} \\ \text{de.Reynolds} \end{array}, \begin{array}{c} \text{rugosité} \\ \text{relative} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lambda_f = \frac{\Delta p^*}{\frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho v^2} = f \left\{ \frac{vD}{v}, \frac{\varepsilon}{D} \right\}$$

Le nombre de Reynolds peut être exprimé en fonction

- de la viscosité cinématique: ν : $Re = \frac{vD}{\nu}$

- ou de la viscosité dynamique: $\mu = \rho \nu$: $Re = \frac{\rho v D}{\mu}$

Attention: On utilise également le nombre de Fanning : $Fa = \frac{\tau_{rz,paroi}}{\frac{1}{2} \rho v^2} = \frac{\lambda_f}{4}$

Conduites circulaires

Pour une conduite circulaire, en régime laminaire ($Re < 2000$) on a: $\lambda_f = \frac{64}{Re}$

En régime turbulent ($Re > 4000$), différentes corrélations sont utilisées

- citons celle de Colebrook pour les tubes rugueux qui est représentée par l'abaque de Moody.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.71D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda_f}} \right)$$

- et celles Blasius pour les tubes lisses

$$\lambda_f = 0.316 Re^{-1/4} \text{ pour } 4000 < Re < 10^5 \text{ et } \lambda_f = 0.18 Re^{-1/5} \text{ pour } Re > 10^5$$

Conduites non circulaires

En **régime turbulent** on peut utiliser les mêmes relations pour des conduites non circulaires en remplaçant le diamètre par le diamètre hydraulique (pour une canalisation partiellement remplie d'eau, on prendra la section de passage du liquide et le périmètre mouillé c'est à dire la longueur où s'exerce le frottement liquide/paroi, on néglige le frottement liquide/air)

$$D_h = \frac{4 \cdot \text{Section}}{\text{Périmètre}}$$

Attention: Certains auteurs utilisent également le rayon hydraulique, mais celui-ci ne correspond pas au rayon pour une conduite circulaire: à éviter !

b) Pertes de charge singulières

C'est ici la perte de charge (et non plus la perte de charge par unité de longueur) qui dépend de 5 variables (et de la géométrie du système).

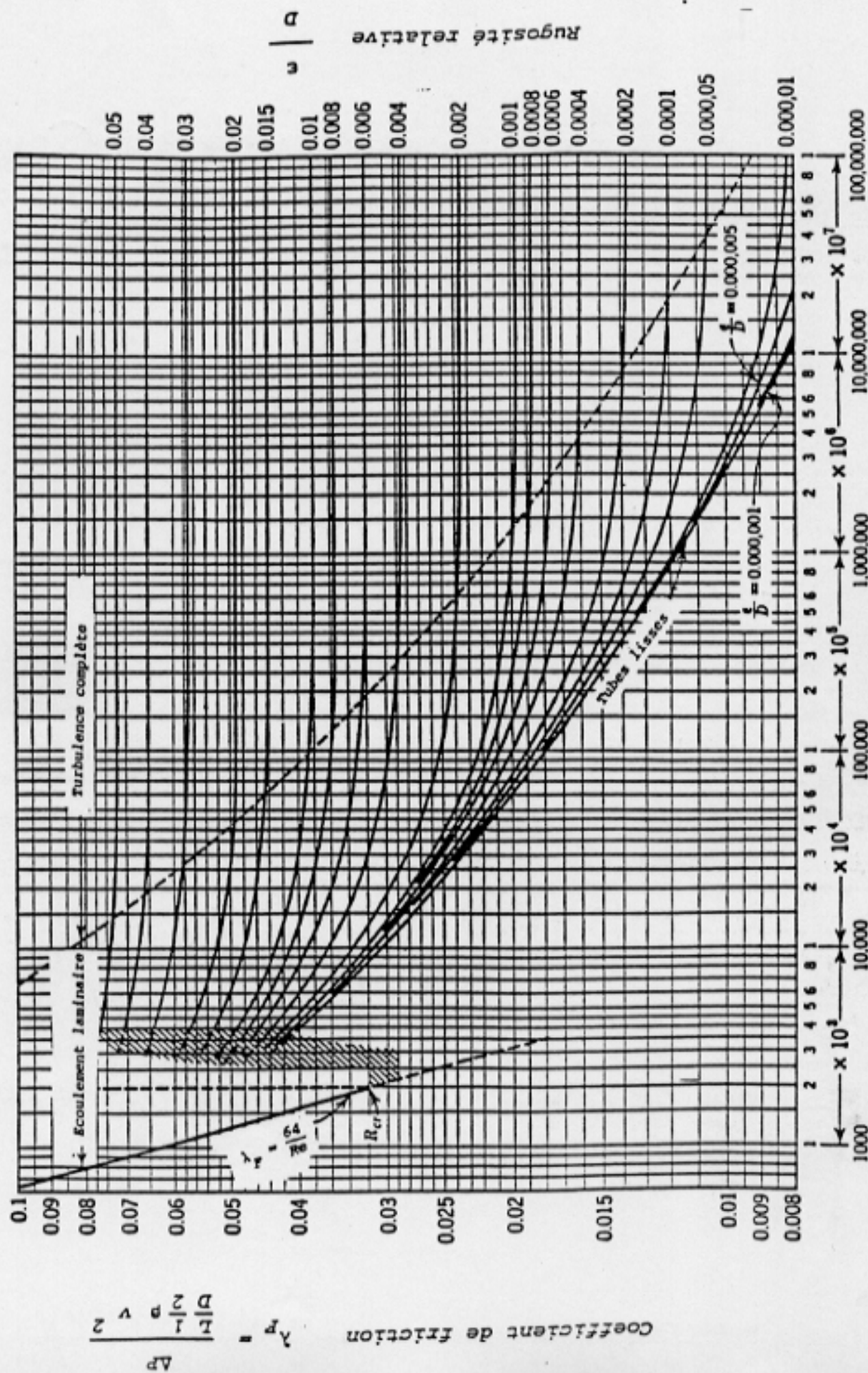
$$\Delta p^* = f \{ v, D, \varepsilon, \rho, \nu \}$$

L'analyse dimensionnelle aboutit alors à une relation entre 3 nombres sans dimension:

$$\left(\begin{array}{c} \text{coeff.de.perte.de} \\ \text{charge.singuliere} \end{array} \right) = \frac{\Delta p^*}{\frac{1}{2} \rho v^2} = f \left\{ \frac{vD}{v}, \frac{\varepsilon}{D} \right\}$$

COEFFICIENT DE FRICTION EN FONCTION DU NOMBRE DE REYNOLDS

[Moody, L. F., Trans. ASME, 66, 671-84 (1944).]



$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu}$$

Dans le cas de coudes, vannes etc., on définit en général une longueur équivalente de tuyauterie circulaire: L_e . Par définition, une tuyauterie de cette longueur (et dont le diamètre correspond à celui de l'obstacle: vanne...) générerait la même perte de charge que l'obstacle. On écrit alors:

$$\frac{\Delta p^*}{\frac{L_e}{D} \frac{1}{2} \rho v^2} = \lambda_f \left\{ \frac{vD}{\nu}, \frac{\varepsilon}{D} \right\}$$

Le terme de droite est le coefficient de perte de charge linéaire de la tuyauterie cylindrique raccordée à la vanne, au coude etc. La valeur de L_e/D ne dépend que des rapports géométriques et non pas de la dimension. Par exemple pour un coude à 90° , L_e/D est fonction du rapport entre le rayon de courbure du coude et le diamètre du tube.

Dans le cas de rétrécissements ou d'élargissements, on néglige en général les pertes par frottements visqueux ainsi que les effets de rugosité, et on écrit:

$$\frac{\Delta p^*}{\frac{1}{2} \rho v^2} = K$$

où K est une constante qui ne dépend que de la forme du rétrécissement (élargissement) et du rapport des sections d'entrée et de sortie

par convention on prend la vitesse dans la section la plus petite

pour un élargissement au niveau de l'embouchure d'une conduite dans un grand bac $K=1$

L'utilisation de longueurs équivalentes réduites (L_e/D) et de coefficients de perte de charge singulière indépendants du Reynolds n'est valable qu'en première approximation. Pour plus de détails et pour des applications numériques on se reportera à des ouvrages spécialisés tel que le *Memento des pertes de charges* (Idel'cik I.E. Eyrolles 1979), on trouvera également quelques indications dans *Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique* (Midoux N. Lavoisier 1988).

2.14) Calcul de circuit

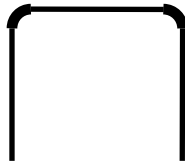
Dans le cas d'un circuit composé de différents sous systèmes (tubes, vannes, réservoir) et remplissant les hypothèses suivantes:

- régime permanent
- fluide de masse volumique constante et newtonien
- pression (et potentiel) uniforme sur les sections de raccordement des sous-systèmes
- pour chaque section tubulaire la longueur d'établissement est négligeable devant la longueur du tronçon (distance au bout de laquelle le profil de vitesse est constant)
- un seul diamètre de tubulure
- une seule rugosité de paroi

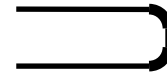
on a:
$$\Delta p_{\text{circuit}}^* = \frac{1}{2} \rho v^2 \left[\left(\sum \frac{L}{D} + \sum \frac{L_e}{D} \right) \lambda_f + \sum K \right] \quad \text{avec } \lambda_f = f\{Re, \varepsilon/D\}$$

Si l'une des hypothèses ci-dessus n'est pas vérifiée, remonter en sens inverse les différentes étapes jusqu'à $F=My$ si nécessaire !

formule valable



formule non valable (longueur d'établissement non négligeable sur le tronçon vertical)



(la formule donnerait d'ailleurs le même résultat dans ces 2 cas alors que la perte de charge est plus forte à gauche qu'à droite)

Cette relation (éventuellement adaptée si la situation plus complexe que celle décrite par les hypothèses d'application) est à combiner dans la pratique avec l'équation de bilan d'énergie mécanique déjà énoncé précédemment

- pour un **circuit ouvert** (en régime permanent pour un fluide incompressible) :

$$p_s^* - p_e^* = \Delta p_{pompe}^* - \Delta p_{circuit}^*$$

- pour un **circuit fermé** (en régime permanent pour un fluide incompressible) :

$$\Delta p_{pompe}^* = \Delta p_{circuit}^*$$

2.15) Ecoulement autour d'obstacles

Considérons un objet (obstacle) placé dans un écoulement de direction principale Ox . La composante selon Ox de la résultante des forces, appelée force de traînée, est fonction de la géométrie ainsi que :

- d'une dimension caractéristique: D
- de la masse volumique du fluide: ρ
- de la viscosité cinématique du fluide: ν
- de la vitesse du fluide (orientée selon Ox) en amont de l'objet: v

$$F_x = f\{D, \rho, \nu, v\}$$

Cette relation fait intervenir 5 variables qui s'expriment à partir de 3 unités fondamentales: (m,s,kg) (le rang de la matrice des dimensions est également 3). L'analyse dimensionnelle nous indique alors que l'on peut exprimer cette relation à l'aide de $(5-3)=2$ nombres sans dimension:

$$C_x = f\{Re\} \text{ avec } C_x = \frac{F_x/A}{\frac{1}{2}\rho v^2} \text{ et } Re = \frac{vD}{\nu}$$

où A est la section droite de l'objet perpendiculairement à la direction de l'écoulement (pour une sphère $A=\pi D^2/4$, ne pas confondre avec la surface de l'objet: $S=\pi D^2$)

Cas d'une sphère:	$Re < 2$	$C_x = 24/Re$	Stokes
	$2 < Re < 500$	$C_x = 10/\sqrt{Re}$	Lapple et Sherpherd (il existe des relations plus précises)
	$Re > 500$	$C_x = 0,43$	Newton

Si l'objet n'est pas symétrique par rapport à l'axe Ox , il peut également y avoir une composante selon Oy et Oz (portance) et un moment des forces non nul par rapport au centre de l'objet.

2.16) Ecoulement en milieu poreux: perte de charge à travers un lit fixe

On considère que l'écoulement se fait à travers un canal de section très complexe mais qui peut être caractérisé par son diamètre hydraulique moyen D_h .

$$D_h = 4 \frac{\text{section occupée par le fluide}}{\text{périmètre mouillé}}$$

Intégrons numérateur et dénominateur entre 0 et L

$$D_h = 4 \frac{\text{volume occupé par le fluide}}{\text{surface des particules}}$$

Divisons par le volume du lit et définissons ε comme le taux de vide, on obtient alors:

$$D_h = \frac{4 \cdot \varepsilon}{a_v (1 - \varepsilon)} \quad \text{où } a_v \text{ est la surface spécifique des particules: } \frac{\text{surface des particules}}{\text{volume des particules}}$$

Pour des sphères, on a: $a_v = (\pi D^2) / (\pi D^3 / 6) = 6 / D$

Pour des particules non sphériques on définit un diamètre équivalent $D = 6 / a_v$

$$\text{D'où: } D_h = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon)} D$$

En **régime laminaire**, on sait que: $\frac{\Delta p^*}{L} \frac{1}{D_h} \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{k}{Re}$ ($k = 64$ pour des tubes circulaires)

Si on applique cette relation aux lits fixes, on obtient: $\frac{\Delta p^*}{L} = 72 \frac{\mu \cdot v}{D^2} \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3}$

Mais la tortuosité des canaux fait que le coefficient 72 est sous-estimé, on trouve en fait (expérimentalement):

$$\frac{\Delta p^*}{L} = 150 \frac{\mu \cdot v}{D^2} \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3}$$

En **régime turbulent**, lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini, la viscosité n'intervient plus

$$\frac{\Delta p^*}{L} \frac{1}{D_h} \frac{1}{2} \rho v^2 \text{ tend alors vers une constante}$$

Pour de grands nombres de Reynolds, on trouve expérimentalement:

$$\frac{\Delta p^*}{L} = 1,75 \frac{\rho v^2}{D} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon^3}$$

La relation d'Ergun combine les deux relations précédentes:

$$\boxed{\frac{\Delta p^*}{L} = 150 \frac{\mu \cdot v}{D^2} \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} + 1,75 \frac{\rho v^2}{D} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon^3}}$$

v est la vitesse débitante: débit du fluide/ section totale du lit

D est le diamètre des particules (équivalent si les particules ne sont pas sphériques)

ε est le taux de vide

Le premier terme est prépondérant pour de faibles nombres de Reynolds de particule : $(vD)/(\varepsilon v)$, le second terme prédomine pour de grands nombres de Reynolds.

3) Transferts d'énergie

Il vaut mieux acheter un thermomètre en été qu'en hiver. Il coûte le même prix mais il contient davantage de mercure. Francis Blanche

Nous allons analyser maintenant le transport d'énergie et plus particulièrement de la chaleur dans un fluide dont le mouvement est connu. Dans un premier temps nous considérons un petit élément de volume parallélépipédique ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$) fixe.

3.1) Equation de conservation sur un élément de volume fixe (énergie totale, énergie interne)

3.1.1) Energie totale

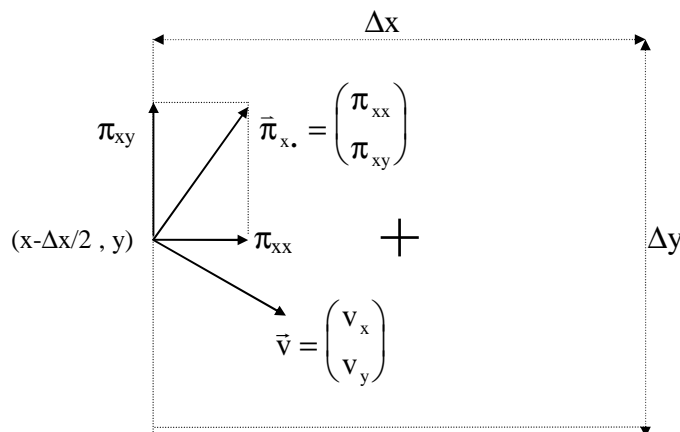
Le premier principe de la thermodynamique indique que l'accumulation plus le bilan des flux d'énergie interne et d'énergie cinétique est égal à la somme du flux de chaleur et de la puissance de toutes les forces extérieures.

$$\frac{d(U + K)}{dt} + \Delta_{s-e} \dot{m}(\hat{U} + \hat{K}) = \dot{Q} + \dot{W}_{\text{tot}}$$

Ecrivons maintenant ce bilan sur un petit élément de volume, nous aurons :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho(\hat{U} + \frac{1}{2}v^2)}{\partial t}}_{\text{accumulation}} + \underbrace{\vec{v} \cdot (\rho(\hat{U} + \frac{1}{2}v^2)\vec{v})}_{\text{bilan des flux convectifs}} = \underbrace{-\vec{v} \cdot (\vec{j}_q)}_{\text{bilan des flux diffusifs de chaleur}} + \underbrace{r_q}_{\text{source volumique de chaleur (effet Joule...)}} + \underbrace{\rho \vec{g} \cdot \vec{v}}_{\text{puissance des forces de gravité}} + \underbrace{\quad}_{\text{bilan des puissances des forces exercées à travers les facettes}}$$

La puissance d'une force s'obtient en la multipliant scalairement par la vitesse, c'est ce que nous avons fait pour la gravité. Calculons maintenant le bilan des puissances des forces exercées à travers les facettes.



La force exercée par le fluide situé à gauche sur celui de l'élément vaut : $\Delta y \cdot \Delta z \cdot \vec{\pi}_x = \Delta y \cdot \Delta z \cdot \begin{pmatrix} \pi_{xx} \\ \pi_{xy} \end{pmatrix}$

Cette expression devant être prise en $(x-\Delta x/2, y)$.

La puissance de cette force vaut : $\Delta y \cdot \Delta z \cdot \vec{\pi}_x \cdot \vec{v} = \Delta y \cdot \Delta z \cdot (\pi_{xx} \cdot v_x + \pi_{xy} \cdot v_y)$ toujours en $(x-\Delta x/2, y)$.

Pour la puissance de la force exercée par le fluide situé à droite sur celui de l'élément, il convient de mettre un signe négatif (loi de l'action et de la réaction) car par convention la contrainte $\bar{\pi}_x$ est celle exercée dans le sens des x croissants (par la gauche sur la droite). Le centre de la facette est cette fois situé en $(x+\Delta x/2, y)$.

Le bilan sur les facettes de gauche et de droite divisé par le volume de l'élément s'écrit donc :

$$\frac{(\pi_{xx} \cdot v_x + \pi_{xy} \cdot v_y)\{x - \Delta x / 2, y\} - (\pi_{xx} \cdot v_x + \pi_{xy} \cdot v_y)\{x + \Delta x / 2, y\}}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} - \frac{\partial(\pi_{xx} \cdot v_x + \pi_{xy} \cdot v_y)}{\partial x}$$

On trouve de la même façon pour le bilan sur les facettes du haut et du bas : $-\frac{\partial(\pi_{yx} \cdot v_x + \pi_{yy} \cdot v_y)}{\partial y}$

Finalement on peut condenser l'écriture du bilan sous la forme suivante :

$$-\left[\frac{\partial(\pi_{xx} \cdot v_x + \pi_{xy} \cdot v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\pi_{yx} \cdot v_x + \pi_{yy} \cdot v_y)}{\partial y} \right] = -\bar{\nabla} \cdot (\bar{\pi} \cdot \bar{v})$$

En effet $\bar{\pi} \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{xx} \cdot v_x + \pi_{xy} \cdot v_y \\ \pi_{yx} \cdot v_x + \pi_{yy} \cdot v_y \end{pmatrix}$ produit d'une matrice et d'un vecteur

D'où $\bar{\nabla} \cdot (\bar{\pi} \cdot \bar{v}) = \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi_{xx} \cdot v_x + \pi_{xy} \cdot v_y \\ \pi_{yx} \cdot v_x + \pi_{yy} \cdot v_y \end{pmatrix} = \frac{\partial(\pi_{xx} \cdot v_x + \pi_{xy} \cdot v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\pi_{yx} \cdot v_x + \pi_{yy} \cdot v_y)}{\partial y}$
produit scalaire de deux vecteurs

Ainsi le premier principe de la thermodynamique écrit sur un petit élément de volume (système ouvert) s'écrit :

$\frac{\partial \rho(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2)}{\partial t}$	$+ \bar{\nabla} \cdot (\rho(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) \bar{v})$	$= - \bar{\nabla} \cdot (\bar{j}_q)$	$+ r_q$	$- \bar{\nabla} \cdot (\bar{\pi} \cdot \bar{v})$	$+ \rho \bar{g} \cdot \bar{v}$
accumulation	bilan des flux convectifs	bilan des flux diffusifs de chaleur	source volumique de chaleur (effet Joule...)	bilan des puissances des forces exercées à travers les facettes	puissance des forces volumiques à distance

On rappelle que la divergence $\bar{\nabla} \cdot \bar{\phi}$ représente le bilan (*sortie - entrée*) de la quantité dont la densité de flux est représentée par le vecteur $\bar{\phi}$ (divisé par le volume de l'élément).

Comme pour un fluide on a: $\bar{\pi} = p\bar{I} + \bar{\tau}$, on peut écrire:

$$\frac{\partial \rho(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2)}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) \bar{v}) = - \bar{\nabla} \cdot (\bar{j}_q) + r_q - \bar{\nabla} \cdot (\bar{\tau} \cdot \bar{v}) - \bar{\nabla} \cdot (p \bar{v}) + \rho \bar{g} \cdot \bar{v}$$

Si les forces volumiques à distance sont uniquement celle de la gravité, on a ¹⁷: $\vec{g} = -\vec{\nabla}(gz)$

D'où : $\rho \vec{g} \cdot \vec{v} = -(\vec{\nabla}gz) \cdot (\rho \vec{v})$

Appliquons une formule du type $f'g = (fg)' - fg'$: $(\vec{\nabla}gz) \cdot (\rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (gz \cdot \rho \vec{v}) - (gz) \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$

Multiplions la conservation de la masse par (gz) : $(gz) \frac{\partial \rho}{\partial t} + (gz) \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

D'où (comme g est indépendant du temps) : $\rho \vec{g} \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla} \cdot (gz \cdot \rho \vec{v}) - gz \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho gz \cdot \vec{v}) - \frac{\partial \rho gz}{\partial t}$

Finalement, l'équation de conservation de l'énergie totale (interne+cinétique+potentielle) s'écrit:

$$\frac{\partial \rho \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_q) + r_q - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\tau} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (p \cdot \vec{v})$$

Remarque.

On peut faire apparaître l'enthalpie: $\hat{H} = \hat{U} + p\hat{V} = \hat{U} + p/\rho$ où \hat{V} est le volume massique

$$\frac{\partial \rho \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \left(\hat{H} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_q) + r_q - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\tau} \cdot \vec{v})$$

3.1.2) Energie interne

Au paragraphe 2.10 nous avons dérivé l'équation de conservation de l'énergie cinétique (macroscopique).

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}) + p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\tau} \cdot \vec{v}) + \bar{\tau} : (\vec{\nabla} \vec{v}) + \rho \vec{g} \cdot \vec{v}$$

Si nous soustrayons l'équation de conservation de l'énergie cinétique macroscopique ($\frac{1}{2} v^2$) à celle résultant du premier principe de la thermodynamique pour l'énergie totale ($\hat{U} + \frac{1}{2} v^2$), nous obtenons l'équation de conservation de l'énergie interne:

$\frac{\partial \rho \hat{U}}{\partial t}$	+	$\vec{\nabla} \cdot (\rho \hat{U} \vec{v})$	=	-	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_q)$	+	r_q	-	$\bar{\tau} : (\vec{\nabla} \vec{v})$	-	$p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$
accumulation		bilan des flux convectifs			bilan des flux diffusifs de chaleur		source volumique de chaleur		énergie mécanique dissipée en chaleur (irréversible)		énergie mécanique convertie de façon réversible en énergie interne

Remarque : le dernier terme est nul pour un fluide incompressible.

¹⁷ Il suffit en fait que ces forces dérivent d'un potentiel constant dans le temps $\Phi \leftrightarrow gz$

3.2) Equation de conservation sur une particule de fluide suivie dans son mouvement.

(dérivée particulaire)

De la même façon que pour les équations de conservation de la masse d'un constituant et de la quantité de mouvement, les équations précédentes peuvent être réécrites en utilisant la dérivée particulaire:

$$\rho \frac{D\left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2\right)}{Dt} = - \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_q) + r_q - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (p \cdot \vec{v}) + \rho \vec{g} \cdot \vec{v}$$

$$\rho \frac{D\left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + gz\right)}{Dt} = - \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_q) + r_q - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (p \cdot \vec{v})$$

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = - \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_q) + r_q - \vec{\tau} : (\vec{\nabla} \vec{v}) - p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

3.3) Equation d'état

Dans le cas général, l'énergie interne massique \hat{U} est une fonction de la température et de la pression (éventuellement de la composition)

$$\hat{U} = f\{p, T\}$$

Pour les **gaz parfaits** on a:

$$\hat{U} = \hat{C}_v (T - T_{\text{ref}}) + \hat{U}_{\text{ref}} \quad \text{et} \quad \hat{H} = \hat{C}_p (T - T_{\text{ref}}) + \hat{H}_{\text{ref}}$$

Pour les **liquides** et les **solides** la pression a peu d'influence. En l'absence de changement de phase et si la capacité thermique massique : \hat{C} , est constante on a:

$$\hat{U} = \hat{C}(T - T_{\text{ref}}) + \hat{U}_{\text{ref}} \quad \text{et} \quad \hat{C}_p = \hat{C}_v = \hat{C}$$

Dans le cas d'un mélange diphasique liquide-vapeur d'un corps pur, si x est la fraction massique de la phase vapeur on a:

$$p = p_{\text{sat}}\{T\} \quad \text{et} \quad \hat{U} = x \cdot \hat{U}_{\text{vap.sat}}\{T\} + (1 - x) \cdot \hat{U}_{\text{liq.sat}}\{T\}$$

Dans le cas d'un mélange diphasique solide-liquide d'un corps pur, si x est la fraction massique de la phase liquide on a:

$$T = T_{\text{fusion}} \quad \text{et} \quad \hat{U} = x \cdot \hat{U}_{\text{liq}}\{T_{\text{fusion}}\} + (1 - x) \cdot \hat{U}_{\text{sol}}\{T_{\text{fusion}}\}$$

Si l'on a affaire à un mélange dont la composition varie, l'énergie interne massique est fonction en plus de la fraction massique des différents constituants.

$$\hat{U} = f\{p, T, \omega_i\}$$

A une pression et une température données, l'énergie interne d'un mélange n'est pas a priori égale à la somme des énergies internes de chacun des constituants purs à ces mêmes pression et température. (inversement si on mélange, de façon adiabatique, un litre d'eau à 20°C et un litre d'alcool à 20°C, le mélange ne sera pas exactement à 20°C).

On a cependant souvent affaire à des milieux dilués, dans ce cas on peut considérer que la capacité calorifique est constante.

$$\hat{U} = \hat{C}_v (T - T_{\text{ref}}) + \hat{U}_{\text{ref}}$$

En ce qui concerne la masse volumique, nous avons déjà indiqué qu'elle était fonction, a priori, de la composition, de la pression et de la température. Dans beaucoup de problèmes de circulation d'air avec transfert thermique (chauffage d'une pièce par un radiateur par exemple) on utilise l'**approximation de Boussinesq**. Cela revient à dire que le volume occupé par un kg de fluide ne varie pas beaucoup avec la température. De ce point de vue on peut considérer que ρ est constant. Par contre il est important de tenir compte du fait que la force de gravité exercée sur un m³ d'air, soit $\rho \cdot \vec{g}$, dépend de sa température. De ce point de vue on doit considérer que ρ dépend de la température. On utilise pour cela une approximation linéaire autour d'une température moyenne T_0 .

dans toutes les équations on utilise : $\rho = \text{cst} = \rho_0 = \rho\{T_0\}$

sauf dans le terme $\rho \cdot \vec{g}$ que l'on approche par : $\rho \cdot \vec{g} \approx \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \vec{g}$

pour un gaz parfait $\beta = 1/T_0$

Ceci permet, d'une façon simple, de tenir compte que de l'air chaud a tendance à monter et de l'air froid à descendre.

3.4) Equation de transfert (loi de Fourier)

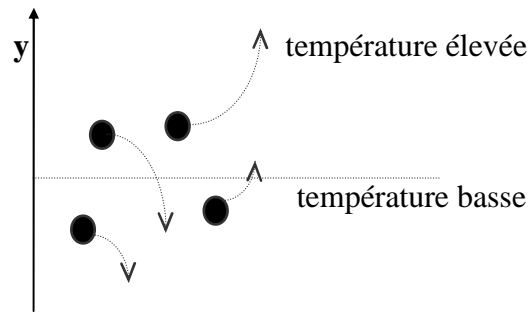
3.4.1) Transfert unidirectionnel

Nous avons vu en thermodynamique que la loi de Fourier était l'expression, pour un milieu continu, du fait que le flux de chaleur va du plus chaud au plus froid et qu'il est proportionnel à l'écart de température. Si la température est uniquement fonction de y alors le flux diffusif (pour la chaleur on parle également de conduction) s'écrit :

$$j_{q,y} = -\lambda \frac{dT}{dy}$$

On peut donner une interprétation de la conduction dans les gaz similaire à celle des transferts de matière et de quantité de mouvement. Dans les solides la transmission de la chaleur peut se faire par d'autres mécanismes notamment par l'intermédiaire du 'gaz d'électrons' dans les métaux.

L'agitation moléculaire (on parle aussi d'agitation thermique) des particules est d'autant plus importante que la température est élevée. Autant de particules traversent le plan perpendiculaire à *oy* de *haut en bas* que de *bas en haut* (conservation de la masse)¹⁸. Mais les particules qui descendent ont une énergie cinétique plus importante que celles qui montent, d'où un flux net d'énergie cinétique (d'agitation moléculaire). Rappelons que pour un gaz parfait monoatomique l'énergie interne n'est autre que l'énergie cinétique des particules. Ce flux d'énergie cinétique (d'agitation moléculaire) correspond donc à un flux diffusif d'énergie interne.



On peut utiliser la loi de Fourier pour estimer le flux diffusif d'énergie interne ou de chaleur dans la plupart des cas, en phase gazeuse, liquide ou solide. La conductivité thermique est, en général, fonction de la température et éventuellement de la pression et de la composition.

$$\lambda = f\{T, p, \omega_i\}$$

Si la capacité thermique à pression constante est indépendante de la température, on peut encore formuler la loi de Fourier en terme de gradient de l'enthalpie massique (forme plus proche de la loi de Fick qui est l'équivalent en transfert de matière)

$$j_q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\rho \cdot \frac{\lambda}{\rho \hat{C}_p} \frac{\partial \hat{C}_p T}{\partial y} \quad \text{si } \hat{C}_p \text{ est indépendant de la température}$$

$$\text{soit } j_q = -\rho \cdot \alpha \frac{\partial \hat{H}}{\partial y} \quad \text{où } \alpha = \frac{\lambda}{\rho \hat{C}_p} \text{ est appelé } \mathbf{diffusivité thermique}$$

3.4.2) Transfert pour un champ quelconque de température

Comme pour les transferts de matière, on généralise la dérivée de la température par rapport à *y* par la notion de gradient. La loi de Fourier s'écrit donc:

$$\vec{j}_q = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T = -\lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et si } \hat{C}_p \text{ est indépendant de la température } \vec{j}_q = -\rho \cdot \alpha \vec{\nabla} \hat{H}$$

Remarque : pour les transferts de chaleur il existe trois modes de transport : la convection , la diffusion (ou conduction) et le **rayonnement**.

¹⁸ La vitesse plus importante des particules à haute température est compensée par une densité plus faible

3.5) Conditions aux limites et aux interfaces

3.5.1) Conditions aux limites

Comme pour les transferts de matière, les conditions aux limites se classent en 3 catégories

Dirichlet : on connaît la température (\longleftrightarrow on connaît les fractions massiques)

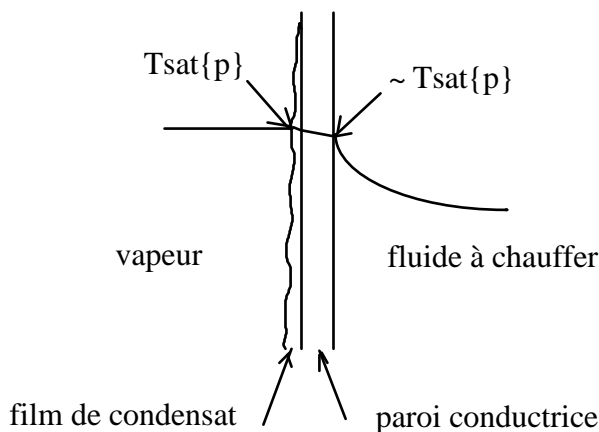
Neumann : on connaît le flux de chaleur (\longleftrightarrow on connaît les flux des constituants)

Cauchy : on connaît une relation entre la température et le flux de chaleur.

a) Condition de Dirichlet : on connaît la température

C'est typiquement le cas à l'**entrée** d'un système. On connaît la température de l'air soufflé dans une serre, une chambre froide...

C'est souvent le cas s'il y a des **équilibres de phase**. Si, par exemple, une paroi de conductivité élevée est chauffée par condensation de vapeur d'eau saturante à pression constante, la température du fluide à chauffer en contact avec la paroi sera proche de la température de saturation correspondant à la pression de la vapeur. Elle sera en fait légèrement inférieure du fait de la résistance thermique du film de condensat et de celle de la paroi.



C'est également le cas si une paroi est chauffée (ou refroidie) par un système de régulation à température constante. (plaque électrique avec palpeur).

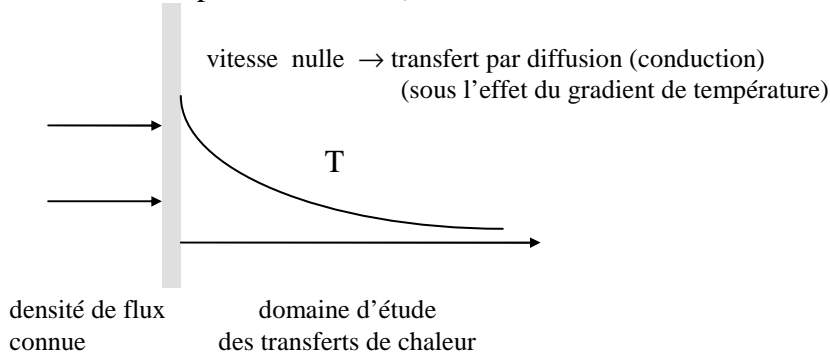
b) Condition de Neumann : on connaît la densité de flux diffusif de chaleur

C'est typiquement le cas pour une **paroi parfaitement isolée**. La densité de flux total (convectif + diffusif) est nulle, par ailleurs, la vitesse est nulle près d'une paroi, il n'y a donc pas de flux convectif. On en déduit que la densité de flux diffusif est nulle.

On peut souvent considérer qu'à la **sortie** d'un dispositif la diffusion est négligeable devant la convection¹⁹.

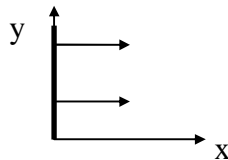
¹⁹ Il faut pour cela que la vitesse en sortie soit suffisamment importante, la tuyauterie assez longue jusqu'au prochain dispositif, ceci comparé à la diffusion thermique moléculaire ou turbulente, $v.L/\alpha \gg 1$. Ecrire cette condition est suffisant si en tout point de la section de sortie, la vitesse est dirigée vers l'extérieur (absence de recirculation passant par cette section).

C'est également le cas si on chauffe à puissance imposée (plaque électrique sans palpeur). La densité de flux d'énergie apportée sous forme électrique (par les résistances) est imposée et pénètre dans le fluide par conduction (la vitesse du fluide étant nulle à la paroi)



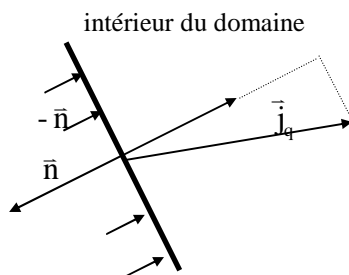
L'explicitation de la densité de flux diffusif de chaleur, que nous noterons $j_{q,entrant}$ est tout à fait similaire à celle de la densité de flux de matière (cf. § 1.5).

Pour une paroi perpendiculaire à ox :



$$j_{q,entrant} \approx j_{q,x} = -\lambda \frac{\partial T_i}{\partial x}$$

Dans le cas d'une paroi perpendiculaire à un vecteur \vec{n} (vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur du domaine) :



$$j_{q,entrant} \approx -\vec{j}_q \cdot \vec{n} = \lambda(\vec{\nabla}T) \cdot \vec{n}$$

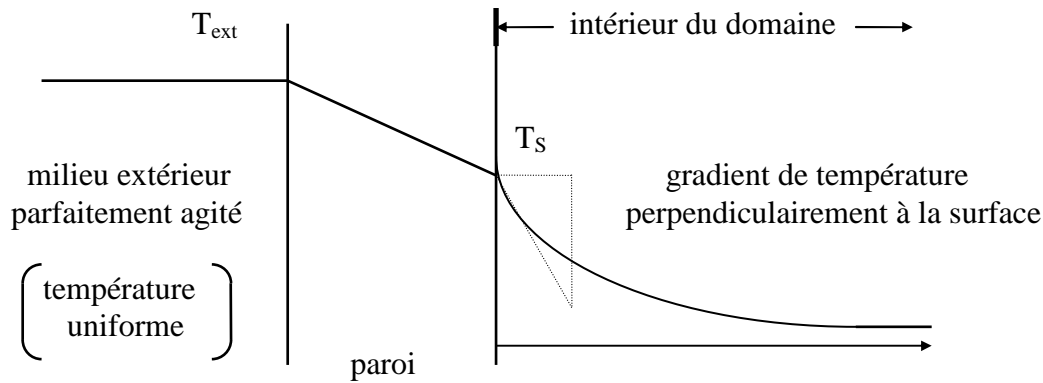
Pour une paroi parfaitement isolée (adiabatique) on aura donc :

$$j_{q,entrant} = \lambda(\vec{\nabla}T) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla}T) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\text{pour une paroi à 45 degrés : } \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

c) Condition de Cauchy : on connaît une relation (affine) entre la densité de flux diffusif de chaleur et la température

C'est typiquement le cas pour une paroi de conductivité connue (n'accumulant pas de chaleur) qui est en contact, du côté extérieur, avec un liquide de température connue et fortement agité. Sur la surface extérieure de la paroi, la température est alors proche de la température moyenne du liquide.



Le flux traversant la paroi (par conduction) s'écrit :

$$j_{q,entrant} = \lambda_{paroi} \frac{T_{ext} - T_s}{e_{paroi}} = h \cdot (T_{ext} - T_s) \quad h : \text{coefficient de transfert de chaleur de la paroi}$$

Ce flux entre dans le domaine uniquement par conduction (diffusion) car la vitesse du fluide est nulle à la paroi (pas de convection). D'où :

$$h(T_{ext} - T_s) = \lambda \bar{\nabla} T|_s \cdot \bar{n}$$

Pour une surface perpendiculaire à ox , on a par exemple: $-\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = h \cdot (T_{ext} - T|_{x=0})$

3.5.2) Conditions d'interface

Dans certains cas on est amené à traiter un système de **deux milieux continus séparés par une interface**. Cette interface peut être la surface de séparation de deux phases (liquide-vapeur, ou fluide-solide) ou une paroi de faible inertie thermique (cette dernière restriction ne s'applique pas au régime permanent).

Contact direct entre deux milieux

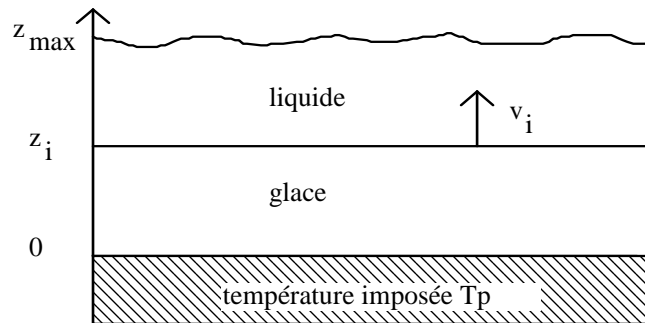
Si aucune paroi ne sépare deux milieux, la température des deux milieux est identique à l'interface et le flux d'énergie interne est continu (ce qui sort d'un milieu rentre dans le second). Le flux de masse totale est évidemment continu lui aussi.

$$\begin{aligned} \text{interface fixe:} \quad & * T_{s-} = T_{s+} \\ & * (\rho \hat{U} \cdot \bar{v} + \vec{j}_q)_{s-} \cdot \bar{n} = (\rho \hat{U} \cdot \bar{v} + \vec{j}_q)_{s+} \cdot \bar{n} \\ & * (\rho \bar{v})_{s-} \cdot \bar{n} = (\rho \bar{v})_{s+} \cdot \bar{n} \end{aligned}$$

Si l'interface se déplace, il faut se placer dans le repère de l'interface, ce qui revient à considérer les vitesses relatives à celle de l'interface: \bar{v}_i

$$\begin{aligned} \text{interface mobile:} \quad & * T_{s-} = T_{s+} \\ & * (\rho \hat{U} \cdot (\bar{v} - \bar{v}_i) + \vec{j}_q)_{s-} \cdot \bar{n} = (\rho \hat{U} \cdot (\bar{v} - \bar{v}_i) + \vec{j}_q)_{s+} \cdot \bar{n} \\ & * (\rho (\bar{v} - \bar{v}_i))_{s-} \cdot \bar{n} = (\rho (\bar{v} - \bar{v}_i))_{s+} \cdot \bar{n} \end{aligned}$$

Prenons l'exemple de la congélation d'une couche de glace au niveau d'une plaque froide à température imposée. Nous supposons que les capacités thermiques de l'eau et de la glace sont constantes. On a:



Au niveau de l'interface : $T_s\{z = z_i\} = T_l\{z = z_i\} = T_{\text{fusion}}$

$$\rho_s(v_s - v_i) = \rho_l(v_l - v_i)$$

$$\rho_s \hat{U}_s(v_s - v_i) - \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial z} = \rho_l \hat{U}_l(v_l - v_i) - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial z}$$

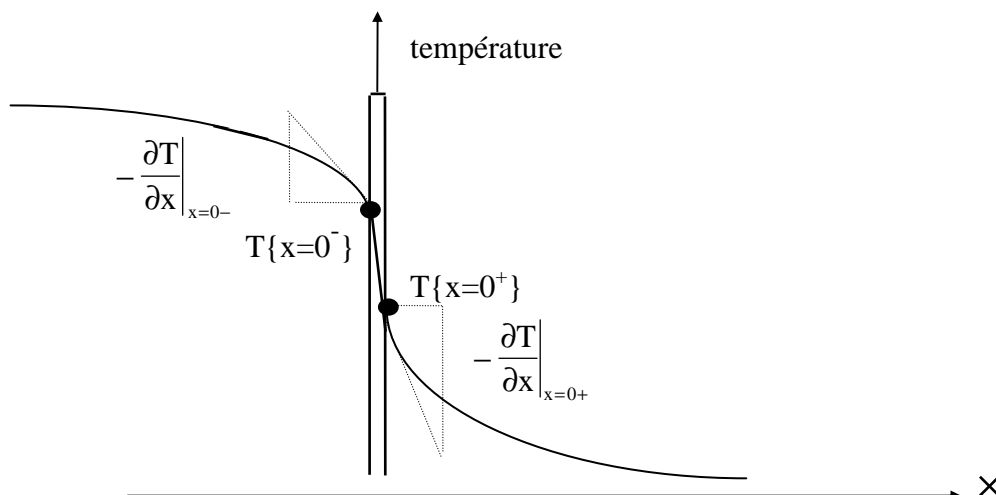
Ainsi: $\lambda_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial z} \right)_i - \lambda_l \left(\frac{\partial T_l}{\partial z} \right)_i = \rho_s (\hat{U}_l - \hat{U}_s) v_i$ où $(\hat{U}_l - \hat{U}_s)$ est la chaleur latente de fusion

la différence entre la chaleur qui arrive et qui part de l'interface par conduction (terme de droite)
sert à congeler de l'eau à l'interface (terme de gauche)

Remarque: la température est continue à l'interface mais elle n'est pas continûment dérivable, il existe cependant des dérivées à gauche et à droite.

Interface constituée par une paroi

Dans le cas d'une paroi, si la température du fluide en contact direct avec la paroi est connue d'un côté de la paroi il suffit de calculer les transferts de l'autre côté. Si, au contraire, on ne la connaît a priori ni d'un côté ni de l'autre de la paroi, on devra traiter le système constitué par les deux milieux et écrire une relation de transfert à travers la paroi ainsi qu'une équation de bilan au niveau de l'interface. On considère en général que la paroi n'accumule pas d'énergie interne (régime permanent ou paroi de faible inertie thermique) et on néglige en général l'épaisseur de la paroi d'un point de vue géométrique. Prenons l'exemple d'une paroi perpendiculaire à ox .



On peut écrire:
$$-\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0-} = -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0+} = h(T_{x=0-} - T_{x=0+}) \quad \text{avec } h = \frac{\lambda_{\text{paroi}}}{e_{\text{paroi}}}$$

flux arrivant à gauche = flux sortant à droite = flux traversant la paroi

Nous avons bien deux équations scalaires, elles remplacent les 2 conditions aux limites qu'il faudrait écrire pour les deux milieux pris séparément (une équation scalaire pour chaque condition aux limites)

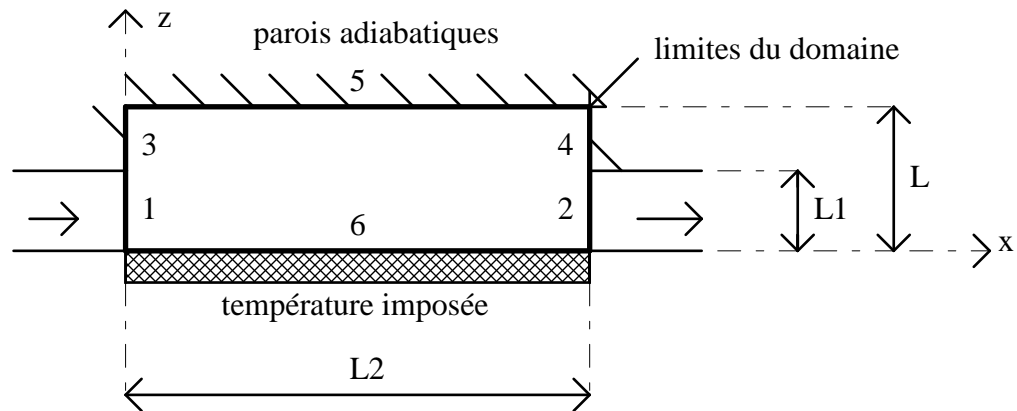
3.6) Combinaison des équations - Adimensionnalisation

3.6.1) Combinaison des équations

Nous allons maintenant combiner les différentes équations dans le cas d'un fluide

- de capacité thermique massique: \hat{C} et de composition constantes
- en considérant l'approximation de Boussinesq pour la dépendance en température de la masse volumique: ρ
- répondant à la loi de Fourier avec une conductivité indépendante de la température
- de rhéologie newtonienne avec une viscosité cinématique indépendante de la température
- sans apport volumique de chaleur
- avec des conditions aux limites à flux nul ou température imposée

Prenons l'exemple schématisé ci-dessous et raisonnons en deux dimensions. La vitesse à l'entrée est v_0 , la hauteur du dispositif est L .



a) Intérieur du domaine

conservation de la masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \oplus \quad \rho = \text{cste} \quad (\text{équation d'état}) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{eq.1})$$

conservation de la quantité de mouvement:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + \bar{\pi}) &= \rho \vec{g} \quad \oplus \quad \rho = \text{cste} \quad \oplus \quad \bar{\pi} = p \bar{I} - \mu (\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) \quad (\text{loi de transfert}) \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) &= -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \end{aligned}$$

Si nous utilisons l'approximation de Boussinesq en prenant T_0 comme température de référence :

$$\begin{aligned}\rho \vec{g} &= \rho_0 \vec{g} - \rho_0 \beta (T - T_0) \vec{g} = -\vec{\nabla} \rho_0 g z - \rho_0 \beta (T - T_0) \vec{g} \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) &= -\vec{\nabla} (p + \rho_0 g z) + \mu \nabla^2 \vec{v} - \rho_0 \beta (T - T_0) \vec{g} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) &= -\vec{\nabla} (\hat{p}) + \mu \nabla^2 \vec{v} - \rho_0 \beta (T - T_0) \vec{g} \\ &\text{avec } \hat{p} = p + \rho_0 g z \text{ pression motrice} \quad (\text{eq. 2})\end{aligned}$$

conservation de l'énergie interne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho \hat{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \hat{U} \vec{v} + \vec{j}_q) &= r_q - \vec{\tau} : (\vec{\nabla} \vec{v}) \quad (\text{loi de conservation}) \\ \oplus \rho &= \text{cste et } \hat{U} = \hat{C}(T - T_{\text{ref}}) + \hat{U}_{\text{ref}} \quad (\text{lois d'état}) \\ \oplus \vec{j}_q &= -\lambda \vec{\nabla} T \quad (\text{loi de transfert}) \quad \oplus r_q = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (T \vec{v} - \frac{\lambda}{\rho \hat{C}} \vec{\nabla} T) &= \frac{\mu}{\rho \hat{C}} (\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) : (\vec{\nabla} \vec{v}) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (T \vec{v}) - \alpha \nabla^2 T &= \frac{\mu}{\rho \hat{C}} (\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) : (\vec{\nabla} \vec{v}) \quad (\text{eq. 3})\end{aligned}$$

b) Limites du domaine

Sur la **section d'entrée 1**: nous connaissons la température T_0 et la vitesse v_0

$$\text{sur S1 (x = 0, } 0 < z < L1) : \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T = T_0 \quad (\text{eq.4})$$

Sur la **section de sortie 2**: nous négligeons la conduction et nous connaissons la pression motrice \hat{p}_0 :

$$\text{sur S2 (x = L2, } 0 < z < L1) : \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \hat{p} = \hat{p}_0 \quad (\text{eq.5})$$

Les **parois 3, 4 et 5** sont adiabatiques (parfaitement isolées), la vitesse et le flux de chaleur sont nuls:

$$\text{sur S3 et S4 (x = 0 ou L2, } L1 < z < L) : \vec{v} = \vec{0}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (\text{eq.6})$$

$$\text{sur S5 (0 < x < L2, z = L) : } \vec{v} = \vec{0}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (\text{eq. 7})$$

Au niveau de la **surface chauffante 6**, la température est imposée et la vitesse est nulle

$$\text{sur S6 (0 < x < L2, z = 0) : } \vec{v} = \vec{0}, \quad T = T_p \quad (\text{eq.8})$$

c) conditions initiales

Nous considérons qu'initialement la température dans le fluide est uniforme dans le domaine et égale à celle du fluide entrant: T_0 et que la vitesse est nulle.

pour $t=0$ (quels que soient x et z): $\vec{v} = \vec{0}$, $T = T_0$. (eq.9)

Le problème est ainsi entièrement défini, nous avons combiné

- les équations de **conservation** (masse, quantité de mouvement, énergie interne)
- les équations d'**état** ($\rho = \text{cste}$ et $\hat{U} = \hat{C}(T - T_{\text{ref}}) + \hat{U}_{\text{ref}}$)
- les lois de **transfert** (fluide newtonien, loi de Fourier)
- les conditions aux **limites**
- et les conditions **initiales** dans un cas particulier.

5.6.2) Adimensionnalisation

Définissons maintenant des **variables sans dimension**:

- la température réduite: $T^* = \frac{T - T_0}{T_p - T_0}$

- elle vaut 0 pour le fluide entrant ou initialement présent dans le domaine
- elle vaut 1 au niveau de la paroi

- les coordonnées adimensionnelles: $\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L}$

- la vitesse adimensionnelle: $\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{v_0}$

En effectuant les changements de variables correspondant à cette adimensionnalisation on obtient:

a) Intérieur du domaine

Equation de continuité

$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{v}^* = 0$ (eq. 1' : conservation de la masse, eq. 1 multipliée par L/v_0)

où $\vec{\nabla}^*$ est le vecteur $\left(\frac{\partial}{\partial x^*} \quad \frac{\partial}{\partial y^*} \quad \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$

Equation de l'énergie interne

$$\frac{\partial T^*}{\partial \left(\frac{\alpha t}{L^2}\right)} + \frac{v_0 L}{\alpha} \nabla^* \cdot (T^* \vec{v}^*) - \nabla^{*2} (T^*) = \frac{\mu v_0^2}{\lambda (T_p - T_0)} \left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{v}^* + (\vec{\nabla}^* \cdot \vec{v}^*)^t \right) : (\vec{\nabla}^* \cdot \vec{v}^*)$$

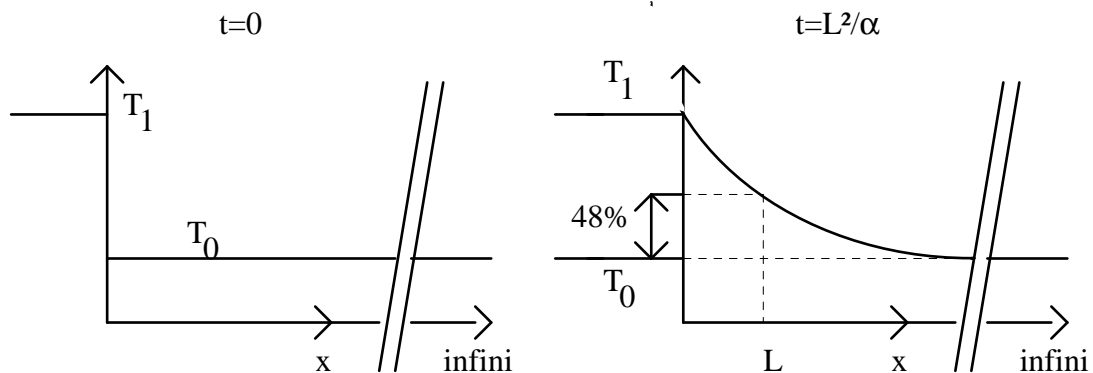
(conservation de l'énergie interne, eq.2 multipliée par L^2/α)

On voit apparaître un temps adimensionnel appelé **nombre de Fourier** et noté Fo.

$$t^* = Fo = \frac{\alpha \cdot t}{L^2} = \frac{t}{L^2 / \alpha} \leftarrow \text{temps caractéristique}$$

Considérons un milieu semi infini de vitesse nulle (les transferts se font uniquement par conduction), la température initiale est uniforme et égale T_0 . Si à l'instant $t=0$, on porte la température à la surface ($x=0$) à une valeur T_1 , alors à la profondeur L , la température réduite: $(T - T_0)/(T_1 - T_0)$ atteint une valeur de $0,48 \approx 1/2$ au bout d'une durée égale à L^2/α

L^2/α est donc le temps caractéristique de diffusion (temps nécessaire pour que "l'information" arrive jusqu'à L).



Il apparaît également le rapport $(v_0 L / \alpha)$ que l'on appelle **nombre de Peclet**, noté Pe. On peut l'interpréter comme le rapport entre une différence de flux convectif (vitesse v_0 , température T_p ou T_0) et un flux conductif (gradient de température $(T_p - T_0)/L$)

$$Pe = \frac{v_0 \cdot L}{\alpha} = \frac{\rho \cdot v_0 \cdot \hat{C} \cdot (T_p - T_0)}{\lambda \frac{(T_p - T_0)}{L}} = \frac{\text{flux convectif}}{\text{flux diffusif}}$$

Enfin, on voit apparaître le groupement: $Br = \frac{\mu v_0^2}{\lambda (T_p - T_0)}$ appelé **nombre de Brinkmann**.

C'est l'ordre de grandeur du rapport entre l'énergie mécanique dissipée (de façon irréversible) en chaleur et l'énergie transmise à la paroi.

- * $\mu \cdot v_0 / L$ est l'ordre de grandeur des contraintes visqueuses, la puissance de ces forces est de l'ordre de $\mu v_0^2 / L$ (multiplié par la surface où elles s'exercent)
- * $\lambda (T_p - T_0) / L$ est la densité de flux de chaleur en régime permanent à travers une épaisseur de fluide immobile L , si la différence de température est $T_p - T_0$ (il faut multiplier ce terme par la surface pour obtenir le flux).

L'équation de conservation de l'énergie interne peut donc se réécrire:

$$\frac{\partial T^*}{\partial Fo} + Pe \cdot \vec{\nabla} \cdot (T^* \vec{v}^*) - \nabla^2 (T^*) = Br \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^* + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^*)^t \right) : (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^*) \quad (\text{eq. 2'})$$

Equation du mouvement:

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial \left(\frac{v_o t}{L} \right)} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}^* \vec{v}^*) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{p} - \hat{p}_0}{\rho v_o^2} \right) + \frac{1}{\left(\frac{v_o L}{\nu} \right)} \nabla^2 (\vec{v}^*) - \frac{\beta (T_p - T_0) L \vec{g}}{v_o^2} T^*$$

On voit apparaître un temps adimensionnel différent de celui relatif à l'équation de l'énergie interne, mais on peut remarquer que:

$$\left(\frac{v_o t}{L} \right) = \left(\frac{\alpha \cdot t}{L^2} \right) \left(\frac{v_o L}{\alpha} \right) = Fo \cdot Pe$$

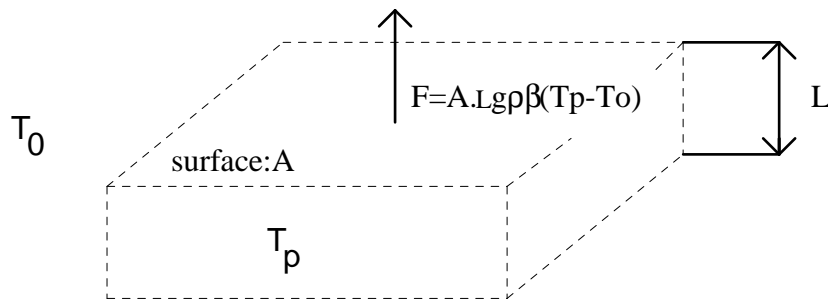
On voit apparaître les nombres d'**Euler**: $\left(\frac{\hat{p} - \hat{p}_0}{\rho v_o^2} \right)$ et de **Reynolds** $\left(\frac{v_o L}{\nu} \right)$

Enfin, on voit apparaître le groupement: $Ri = \frac{g \cdot \beta (T_p - T_0) L}{v_o^2}$ appelé **nombre de Richardson**

Il compare les forces de poussée d'Archimède aux forces d'inertie du fluide, en effet:

$\frac{1}{2} \rho_0 v_o^2$ est la pression dynamique du fluide pour une vitesse égale à v_o
(ou encore l'énergie cinétique par unité de volume)

$\rho_0 g \cdot \beta (T_p - T_0) L$ représente la poussée d'Archimède qui s'exercerait (par unité de surface) sur une couche de fluide d'épaisseur L portée à la température T_p et immergé dans le même fluide à une température T_o



L'équation de conservation de la quantité de mouvement peut donc se réécrire:

$$\frac{1}{Pe} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial Fo} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}^* \vec{v}^*) = -\vec{\nabla} \cdot Eu + \frac{1}{Re} \nabla^2 (\vec{v}^*) - Ri \cdot \vec{e}_z T^* \quad (\text{eq 2'})$$

où \vec{e}_z est le vecteur unitaire orienté selon oz (vers le haut)

b) Limites du domaine:

$$\text{sur S1 } (x^* = 0, 0 < z^* < L1/L) : T^* = 0 \text{ et } \vec{v}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{eq.4'})$$

$$\text{sur S2 } (x^* = L2/L, 0 < z^* < L1/L) : Eu = 0, \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0 \quad (\text{eq. 5'})$$

$$\text{sur S3 et S4 } (x^* = 0 \text{ ou } L2/L, L1/L < z^* < 1) : \vec{v}^* = \vec{0}, \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0 \quad (\text{eq. 6' et 7'})$$

$$\text{sur S5 } (0 < x^* < L2/L, z^* = 1) : \vec{v}^* = \vec{0}, \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 0$$

$$\text{sur S6 } (0 < x^* < L2/L, z^* = 0) : \vec{v}^* = \vec{0}, T^* = 1 \quad (\text{eq. 8'})$$

c) Conditions initiales

$$\text{pour } t^* = Fo = 0, \text{ quels que soient } x^* \text{ et } z^* : \vec{v}^* = \vec{0}, T^* = 0 \quad (\text{eq. 9'})$$

Les équations 1' à 8' décrivent entièrement le système. Elles permettent de calculer l'évolution du champ des variables réduites $(T^*, \vec{v}^*, Eu) = f\{x^*, z^*, Fo = t^*\}$ en fonction des paramètres adimensionnels: Pe, Re, Ri, Br et de la géométrie: (L1/L) et (L2/L)

Remarque:

Il est possible d'obtenir directement les paramètres adimensionnels $(T^*, x^*, z^*, Fo, Re, Pe, Br)$ dont dépend le problème par une analyse de tous les paramètres qui entrent en jeu $(T, T_p, T_0, x, z, t, L, v_0, \rho, \alpha, C, \mu, g)$ et des dimensions fondamentales que font intervenir ces paramètres.

Il faut avant tout remarquer que la température initiale et d'entrée du fluide T_0 peut être prise pour référence. Pour une différence de température $(T_p - T_0)$ donnée, un décalage de T_0 entraîne un décalage identique de toutes les températures.

On forme alors la matrice des dimensions formée par les variables.

	$T - T_0$	$T_p - T_0$	x	z	t	L	v_0	ρ	C	μ	α	g
m	0	0	1	1	0	1	1	-3	-1	-1	2	1
s	0	0	0	0	1	0	-1	0	-2	-1	-1	-2
K	1	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
Kg	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0

Attention ne pas oublier l'accélération de la pesanteur, elle est différentes pour les martiens pourtant la physique est la même pour eux.

Nous avons 12 variables dimensionnelles en relation et le rang de la matrice des dimensions est 4, on peut donc exprimer la relation en faisant intervenir $(12-4)=8$ nombres sans dimension.

$$T^* = f\{x^*, z^*, Fo, Re, Pe, Br, Ri\}$$

Dans la plupart des cas, la dissipation d'énergie mécanique en chaleur est négligeable devant le flux transféré à la paroi chauffante, le nombre de Brinkmann est alors faible et n'intervient pas. Si de plus, les forces de poussée d'Archimède sont faibles devant les forces d'inertie du fluide, le nombre de Richardson est faible et n'intervient pas. On dit que l'on est en **convection forcée**. On a alors :

$$T^* = f\{x^*, z^*, Fo, Re, Pe\}$$

Dans le cas particulier où v_0 est nul (pas de ventilateur ou de pompe), ce sont uniquement les forces de poussée d'Archimède qui génèrent le mouvement, on dit que l'on est en **convection naturelle**. Les nombres de Richardson et de Reynolds n'ont alors plus de sens pris séparément. Par contre en prenant $Ri.Re^2$ on élimine v_0 et l'on obtient un nombre qui caractérise l'apparition de circulations de fluides dues à des différences de densité.

Il s'agit du **nombre de Grashof** :
$$Gr = \frac{g \cdot \beta (T_p - T_0) L^3}{\nu^2}$$

3.7) Notion de coefficients de transfert entre une paroi et un fluide

Nous avons défini précédemment un coefficient de transfert de chaleur à travers une paroi comme la densité de flux de chaleur divisée par la différence de température de part et d'autre de la paroi²⁰. On peut définir de la même manière des coefficients de transfert, notés h , entre une paroi et un fluide comme un flux de chaleur ramenée à une surface et à une différence de température paroi/fluide.

On adimensionnalise ces coefficients de transfert sous la forme d'un **nombre de Nusselt** en les multipliant par une dimension caractéristique et en les divisant par la conductivité thermique du fluide.

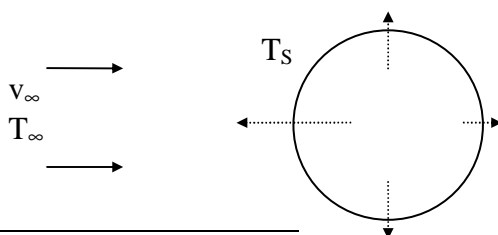
$$h = \frac{\dot{Q} / S}{T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}}} \quad Nu = \frac{h \cdot D}{\lambda_{\text{fluide}}} \quad D: \text{dimension caractéristique}$$

Ecoulement autour d'un objet - température de surface uniforme

Un fluide s'écoule autour d'un objet dont la température de surface T_s , est uniforme. Loin de l'objet, la vitesse et la température du fluide sont uniformes (on les note v_∞ et T_∞). On définit en général le coefficient de transfert sous la forme :

$$h = \frac{\dot{Q} / S}{T_s - T_\infty} \quad \begin{array}{l} \dot{Q} \text{ flux total objet} \rightarrow \text{fluide} \\ S \text{ surface totale de l'objet} \end{array}$$

On remarquera que la densité de flux de chaleur n'est pas uniforme sur l'objet (plus élevée à l'avant qu'à l'arrière)



²⁰ Nous avons également défini des coefficients de transfert de matière à travers une membrane comme la densité de flux du constituant divisée par la différence (de part et d'autre de la membrane) de la fraction massique, de la concentration, de la pression partielle ... (cf § 1.5)

On peut écrire l'ensemble des équations régissant ce problème et (en principe) trouver le champ des températures en fonction de la vitesse loin de l'objet, de la viscosité, des températures T_∞ et T_s , etc.

Le flux de chaleur qui sort de l'objet à travers sa surface S , entre dans le fluide par conduction (vitesse du fluide nulle à la surface), il s'écrit donc :

$$\dot{Q} = \int_S -\lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \, dS \quad (\lambda \text{ est celui du fluide})$$

Connaissant la température en tout point, on peut en déduire le gradient près de la surface et donc le flux de chaleur sortant. Finalement on peut théoriquement exprimer le coefficient de transfert en fonction de la vitesse loin de l'objet, de la viscosité, etc.

Sous forme adimensionnelle, avec les hypothèses de convection forcée en régime permanent, on trouve : $T^* = f\{x^*, Re, Pe\}$ d'où l'on tire $Nu = f\{Re, Pe\}$ ²¹.

On peut bien sûr remplacer, dans cette relation, le couple (Re, Pe) par $(Re, Pe/Re)$. Le rapport Pe/Re est appelé **nombre de Prandtl**, il a l'avantage de ne dépendre que des caractéristiques du fluide et non pas de l'écoulement. Il représente le rapport entre le coefficient de diffusion de la quantité de mouvement (par les forces visqueuses) et le coefficient de diffusion de la chaleur.

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \left(\frac{v_0 L}{\alpha} \right) \bigg/ \left(\frac{v_0 L}{\nu} \right) = \frac{\nu}{\alpha}$$

Ainsi en convection forcée on peut écrire : $Nu = f\{Re, Pr\}$. Les relations de ce type peuvent être obtenues par une résolution analytique des équations dans des cas très simples, par résolution numérique pour des géométries complexes en écoulement laminaire, mais le plus souvent elles sont identifiées par des expériences. On parle de corrélation entre nombres sans dimension.²²

Théoriquement la corrélation obtenue n'est valable que pour une géométrie donnée, par exemple une sphère isolée, et ceci pour une température de surface uniforme, mais l'ingénieur l'utilisera néanmoins pour calculer le refroidissement de pommes (\neq sphères) dont la température de surface n'est pas égale en tout point lors du refroidissement. Il faut être conscient que le résultat n'est alors qu'une approximation.

Ecoulement autour d'un objet - densité de flux uniforme

Supposons maintenant que la densité de flux de chaleur est imposée de façon uniforme sur la surface, dans ce cas la température de surface n'est pas uniforme. On prend alors, dans la définition du coefficient de transfert, la température de surface moyenne.

$$\bar{T}_s = \int_S T \, dS / S \quad h = \frac{\dot{q}}{\bar{T}_s - T_\infty} \quad \dot{q} : \text{densité de flux imposée à la surface}$$

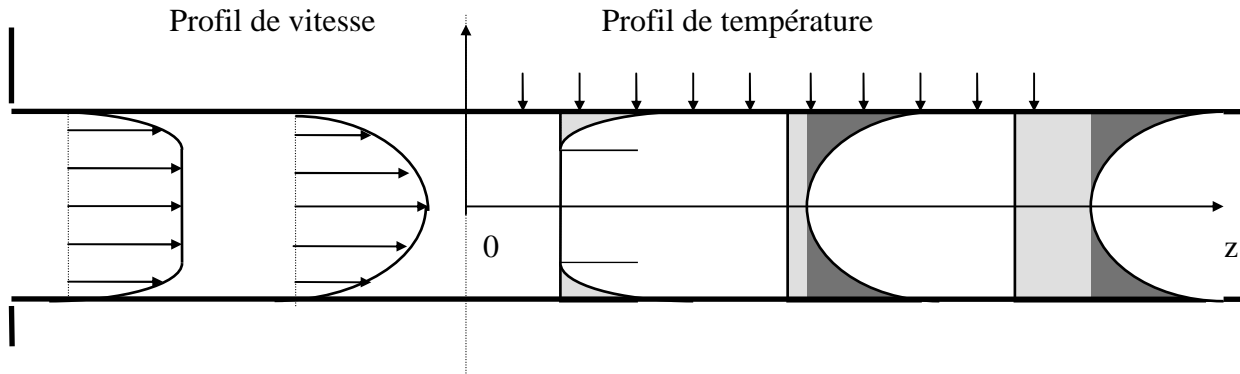
L'expression de la corrélation $Nu\{Re, Pr\}$ sera a priori différente que l'on soit à *température de surface uniforme* ou à *densité de flux de chaleur uniforme*.

²¹ La position x^* n'apparaît pas puisqu'il s'agit d'un coefficient de transfert moyen sur toute la surface de l'objet.

²² Les expressions $C_x\{Re\}$ sont des corrélations similaires en mécanique des fluides

Ecoulement dans une conduite - flux de chaleur uniforme

Un fluide s'écoule dans un tube raccordé à un grand récipient. Admettons que l'on soit en régime laminaire²³, le profil parabolique de vitesse ne s'installe pas immédiatement mais seulement après une certaine longueur dite d'établissement. Prenons le cas où, sur cette zone d'établissement hydrodynamique la paroi du tube est parfaitement isolée, alors qu'au delà une densité de flux de chaleur uniforme \dot{q} est imposée à la paroi.



Lorsque l'on avance dans la zone de chauffage, près de la paroi, une couche de plus en plus épaisse de fluide va être chauffée. On parle de couche limite thermique, une théorie très utilisée mais qui sort du cadre de ce cours permet de prévoir l'épaisseur de cette couche. Lorsque la couche limite atteint le centre du tube, on dit que le régime thermique est établi. Le profil de la température réduite $T^* = (T\{r, z\} - T\{r = 0, z\}) / (T_p\{z\} - T\{r = 0, z\})$ ne dépend alors plus de z .

On peut définir un coefficient de transfert **local** à partir de la densité de flux de chaleur à la paroi, de la température de la paroi à la position axiale z considérée et d'une température moyenne du fluide sur la section : le plus souvent on prend la température de mélange $\bar{T}\{z\}$.

$$h_{\text{local}}\{z\} = \frac{\dot{q}}{T_p\{z\} - \bar{T}\{z\}} \quad \text{avec} \quad \bar{T} = \frac{\int_S (T \cdot v_z) dS}{\int_S v_z dS} \quad \text{tube circulaire} = \frac{\int_0^R T\{r, z\} v\{r\} \cdot 2\pi r \cdot dr}{\dot{V}}$$

On peut écrire l'ensemble des équations régissant ce problème et calculer (en principe) le champ de température, notamment $T_p\{z\}$ et $\bar{T}\{z\}$, en fonction des données du problème : débit, densité de flux de chaleur, etc. On peut donc en déduire le coefficient de transfert. Sous forme adimensionnelle, avec les hypothèses de convection forcée en régime permanent, on trouve :

$$Nu_{\text{local}} = f_1\{z/D, Re, Pr\} \quad f_1 \text{ coefficient local \& densité de flux uniforme}$$

L'intérêt d'utiliser la température de mélange est que, dans certaines conditions, pour l'équation de bilan d'énergie interne, tout se passe comme si la température du fluide était homogène, égale à \bar{T} . En effet, en régime permanent, pour un liquide de capacité thermique volumique ρC indépendant de la température et si la diffusion axiale est négligeable²⁴, le bilan sur une longueur élémentaire dz de la conduite s'écrit:

$$d\left(\int_S \rho C T \cdot v_z \cdot 2\pi r \cdot dr\right) = \dot{q} \cdot 2\pi R \cdot dz \Rightarrow \rho \dot{V} C \cdot d\bar{T}\{z\} = h\{z\} \cdot (T_p\{z\} - \bar{T}\{z\}) \cdot 2\pi R \cdot dz$$

²³ On supposera également pour la suite que la viscosité du fluide est indépendante de la température ce qui est loin d'être le cas pour des produits alimentaires.

²⁴ On néglige également la dissipation d'énergie mécanique en chaleur.

On peut également définir un coefficient de transfert **moyen** sur l'ensemble d'un tube.

$$h_{\text{moyen}} \{L\} = \int_0^L h_{\text{local}} \{z\} dz / L \quad Nu_{\text{moyen}} = f_2 \{ L/D, Re, Pr \} \quad f_2 \neq f_1$$

Les expressions des corrélations sont bien sûr différentes selon que l'on est en régime laminaire ou turbulent et qu'il s'agit d'un Nusselt local ou moyen.

Écoulement dans une conduite - température de paroi uniforme

On peut faire un raisonnement similaire. Les corrélations pour les coefficients de transfert (locaux et moyens) seront, a priori, différentes que l'on soit à *température de surface uniforme* ou à *densité de flux de chaleur uniforme*.

$$Nu_{\text{local}} = g_1 \{ z/D, Re, Pr \} \quad g_1 \text{ (coefficient local \& température uniforme) } \neq f_1$$

$$Nu_{\text{moyen}} = g_2 \{ L/D, Re, Pr \} \quad g_2 \neq g_1 \quad g_2 \neq f_2$$

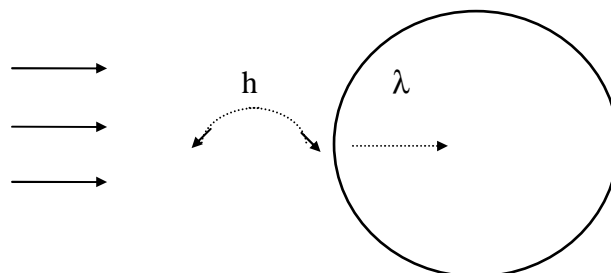
De nombreuses corrélations du type: $Nu=f\{z/L, Re, Pr\}$ existent dans la littérature pour différentes géométries. **Vérifiez** toujours s'il s'agit de coefficients locaux ou moyens. D'une façon générale il faut toujours se reporter à la relation correspondante entre flux (à définir précisément) et écart de température (à définir précisément). Par ailleurs vérifiez toujours les conditions de validité des corrélations (gamme de Reynolds et de Prandtl).

Pour des problèmes concrets, l'ingénieur est amené à utiliser des corrélations dont les hypothèses ne sont pas exactement vérifiées. Il prendra cependant soin de se rapporter à la situation la plus 'approchante' de la littérature et gardera en mémoire que le résultat est lui même approché.

Tout l'**art de l'ingénieur** consiste à faire des **approximations** raisonnables à défaut d'être toujours raisonnées, cet art ne s'acquiert malheureusement que par la pratique.

Transferts conjugués fluide/solide

De nombreux problèmes concrets portent sur le refroidissement ou le réchauffement d'un solide par l'intermédiaire d'un fluide. On écrira alors les équations de transfert de chaleur en régime transitoire dans le solide (uniquement par conduction) avec une condition aux limites faisant intervenir le coefficient de transfert entre la surface du solide et le fluide.



3.8) Equation de conservation sur un domaine macroscopique

En utilisant la formule de Leibnitz et le théorème de Green-Ostrogradskii, on peut intégrer l'équation de conservation de l'énergie totale dans le cas où les forces extérieures sont celles de gravité²⁵.

$$\frac{\partial \rho \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \vec{v} \right) = - \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_q) + r_q - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\pi} \cdot \vec{v})$$

On obtient:

$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) dV + \int_S \rho \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) (\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS =$			
accumulation d'énergie totale	bilan des flux convectifs d'énergie totale		
$- \int_S \vec{j}_q \cdot \vec{n} dS + \int_V r_q dV - \int_S p \vec{v} \cdot \vec{n} dS - \int_S \vec{v} \cdot (\vec{\pi} \cdot \vec{n}) dS$			
bilan des flux diffusifs de chaleur	flux de chaleur apporté au sein du volume	puissance des forces de pression	puissance des forces visqueuses
(système pouvant avoir des frontières mobiles se déplaçant à la vitesse \vec{v}_s)			

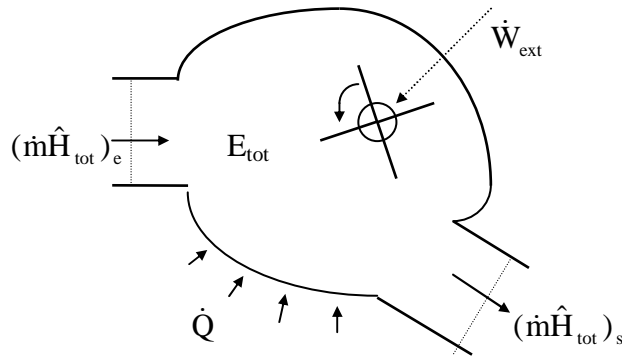
Si les **frontières** du système sont **fixes** et en négligeant les flux diffusifs sur les sections d'entrée et de sortie, on obtient:

$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) dV + \int_S \rho \left(\hat{U} + p \hat{V} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \dot{Q} + \dot{W}_{ext}$			
accumulation d'énergie totale	bilan des flux convectifs d'enthalpie totale	flux de chaleur apporté au niveau des parois et au sein du volume	puissances des forces extérieures sauf pression et gravité

²⁵ Si on a affaire à d'autres forces dérivant d'un potentiel Φ , remplacer gz par Φ

Pour un système de **frontière fixe**, ayant **une** section d'entrée et **une** section de sortie et en négligeant les flux diffusifs (de chaleur et de quantité de mouvement) sur les sections d'entrée/sortie, on peut écrire:

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} + \Delta_{s-e}(\dot{m}\hat{H}_{\text{tot}}) = \dot{Q} + \dot{W}_{\text{ext}}$$



E_{tot} est l'énergie totale (interne, cinétique et potentielle) du fluide contenu dans le domaine :

$$E_{\text{tot}} = \int_V \rho(\hat{U} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + gz) dV$$

\hat{H}_{tot} est l'enthalpie massique totale : $\hat{H}_{\text{tot}} = \hat{U} + p\hat{V} + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}^2} + gz$

\hat{V} est le volume massique ($\hat{V} = 1/\rho$)

(en général p et \hat{V} sont considérés comme uniformes sur les sections d'entrée/sortie)

$\frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}^2}$ est l'énergie cinétique de mélange : $\overline{\mathbf{v}^2} = \int_S \rho \mathbf{v}^2 ((\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n}) dS / \dot{m}$

- si la direction de la vitesse est identique sur toute la section d'entrée et que

ρ est uniforme sur cette section, alors $\overline{\mathbf{v}^2} = \int_S \mathbf{v}^3 dS / \int_S \mathbf{v} dS$

- si la vitesse est uniforme on a simplement : $\overline{\mathbf{v}^2} = \mathbf{v}^2$

\dot{Q} est le flux total de chaleur apporté au fluide contenu dans le système par les parois et au sein du volume (le flux de chaleur convectif sur les section d'entrée/sortie est pris en compte par ailleurs)

\dot{W}_{ext} est la puissance des forces extérieures (sauf celles dues à la gravité et à la pression sur les section d'entrée et de sortie), il s'agit typiquement de la puissance mécanique apportée par les pales d'une pompe ou d'un ventilateur (ou de la puissance mécanique sortant du système dans le cas d'une turbine : terme négatif dans ce cas)

Remarque: en **régime permanent** et si l'on peut **négliger les variations d'énergie cinétique et potentielle** entre l'entrée et la sortie, on a : $\Delta_{s-e} \hat{H} = (\dot{Q} + \dot{W}_{\text{ext}}) / \dot{m}$

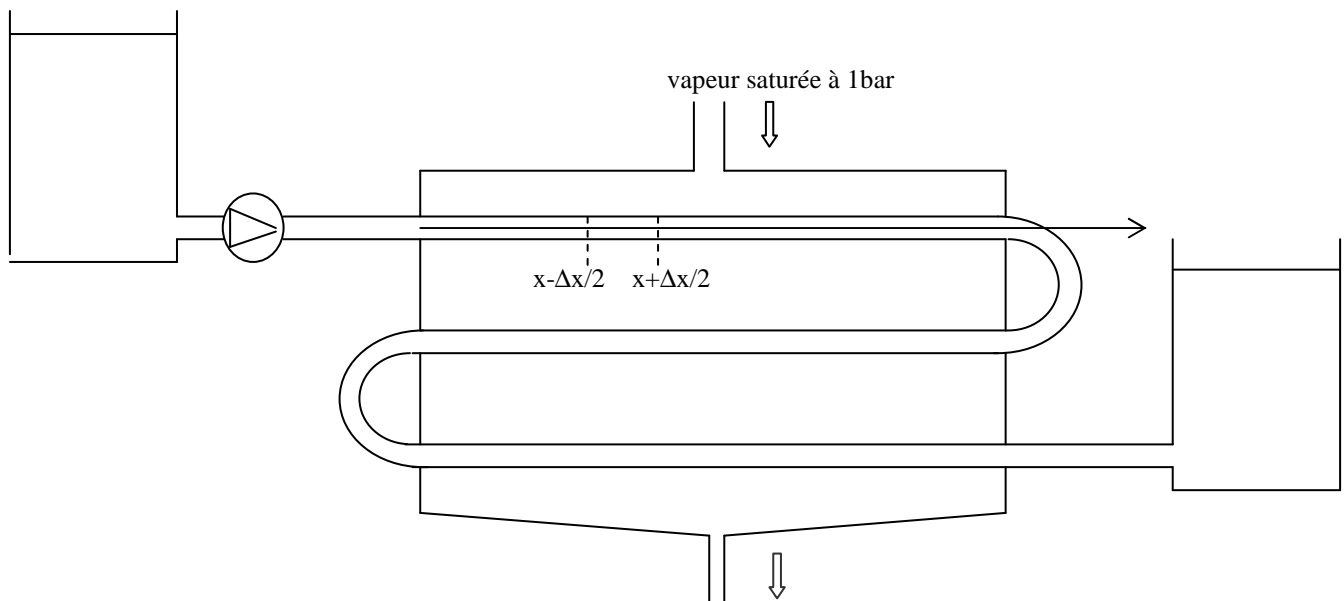
Rappel: une expression plus générale (frontière mobile) a été fournie en thermodynamique (1^{er} principe)

4) Introduction à l'approche filaire (modèle 1D)

Beaucoup de situations peuvent être modélisées de façon simplifiée par une approche unidirectionnelle bien que la géométrie réelle du système soit tridimensionnelle. Exemple : un fil est bien tridimensionnel mais pour des calculs mécaniques il suffit en général de raisonner sur l'évolution de la tension (intégrale des contraintes de traction sur la section transversale) le long de la fibre neutre (lieu des barycentres des sections transversales) du fil.

L'exemple que nous traiterons est celui d'un échangeur de chaleur tubulaire en régime turbulent. Nous aborderons d'abord la modélisation des transferts de chaleur. Bien d'autres cas relèvent de l'approche filaire : écoulements dans les canaux et rivières, écoulements et transferts dans les vaisseaux sanguins, écoulements et transferts dans l'anse de Henlé d'un néphron ... et toutes les équations de conservation (masse, masse d'un constituant, quantité de mouvement, ...) peuvent être formulées de façon analogue.

On considère l'échangeur représenté ci-dessous



Considérons le bilan d'énergie totale sur un tronçon de tuyau compris entre $x-\Delta x/2$ et $x+\Delta x/2$. Si l'on néglige la diffusion axiale, on a (bilan macroscopique sur un système à une entrée et une sortie) :

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} + \Delta \dot{m} \left(\hat{H} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) = \dot{Q} + \dot{W}_{\text{ext}}$$

Dans le cas du chauffage d'un liquide, on peut négliger les variations d'énergie de pression, cinétique et potentielle devant les variations d'énergie interne :

$$\Delta \hat{U} = \hat{C}_p \Delta T \text{ ordre de grandeur des variations sur 1m : } 4000 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} * 10 \text{ K} = 40000 \text{ J.kg}^{-1}$$

$$\Delta p \hat{V} \quad \text{ordre de grandeur des variations sur 1m : } 10^4 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} = 10 \text{ J.kg}^{-1}$$

$$\frac{1}{2} v^2 \quad \text{ordre de grandeur : } \frac{1}{2} 10^2 (\text{m}^1 \text{s}^{-1})^2 = 50 \text{ J.kg}^{-1}$$

$$\Delta gz \quad \text{ordre de grandeur des variations sur 1m : } 9.81 \text{ m}^1 \text{s}^{-2} \cdot 1\text{m} \approx 10 \text{ J.kg}^{-1}$$

Par ailleurs, il n'y a pas d'apport d'énergie mécanique (autre que par les forces de pression sur les section d'entrée-sortie et de gravité) et si le fluide est de masse volumique constante, la masse contenu dans le système (tronçon de tube rigide) est constante et l'équation se résume à :

$$\dot{m}\hat{C}\frac{dT\{x\}}{dt} + \dot{m}\hat{C}\Delta T_{s-e} = \dot{Q}$$

Dans cette équation, en toute rigueur, la température dans le premier terme est la température moyenne surfacique sur la section transversale à la position x alors que dans le deuxième terme, il s'agit de la température moyenne de mélange. Dans le cas turbulent qui nous intéresse ici, la température, comme la vitesse, est presque homogène sur une section transversale (à cause de l'importante diffusion turbulente radiale) sauf dans la couche limite à proximité immédiate de la paroi. Aussi peut-on assimiler ici ses deux températures; il n'en est pas de même en écoulement laminaire.

Exprimons maintenant la masse, le débit massique et le flux de chaleur à la paroi:

$$m = \rho S \Delta x$$

$$\dot{m} = \rho S v \quad \text{où } v = \int_S v_x dS / S = \dot{V} / S \text{ est la vitesse débitante}$$

$$\dot{Q} = \phi_q \chi \Delta x \quad \text{où } \phi_q \text{ est la densité de flux de chaleur à la paroi (W.m}^{-2}\text{) et } \chi \text{ le périmètre}$$

pour un tube circulaire (entièrement rempli) $\chi = \pi D$

Divisons l'équation par Δx et passons à la limite lorsque Δx tend vers 0 :

$$\rho S \hat{C} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho S v \hat{C} \frac{\partial T}{\partial x} = \phi_q \chi$$

Remarque $dT\{x\}/dt$ a été réécrit $\partial T/\partial t$ pour rendre compte que T dépend de deux variables x et t et qu'il s'agit ici de la variation de T par rapport à t à x constant (les autres variables d'espace n'interviennent pas car T est en fait une moyenne sur la section).

La densité de flux de chaleur à la paroi ne peut pas être calculée dans cette approche 1D par la loi de Fourier (qui ferait intervenir la variation radiale de la température au niveau de la paroi), elle sera exprimée à partir d'un coefficient de transfert de chaleur entre la paroi et le fluide (voir paragraphe 3.7) qui lui-même sera calculé d'après une corrélation tirée de la littérature pour le cas considéré (où s'en rapprochant le plus).

$$\phi_q = h(T_p - T) \quad \text{où } h \text{ est le coefficient de transfert de chaleur entre la paroi et le fluide}$$

Le coefficient de transfert dépend des propriétés et de la vitesse du fluide. Sous forme adimensionnelle, en convection forcée, cette relation relie un nombre de Nusselt aux nombres de Reynolds et de Prandtl.

$$Nu = f\{Re, Pr\} \Leftrightarrow \frac{hD}{\lambda} = f\left\{\frac{vD}{\nu}, \frac{\nu}{\alpha}\right\}$$

Pour un écoulement turbulent dans un tube, on peut citer notamment la corrélation proposée par Dittus et Boelter :

$$Nu = 0.024 Re^{0.8} Pr^{0.4} \text{ en situation de chauffage pour } 0.7 < Pr < 120, 2500 < Re < 1.2 \cdot 10^5 \text{ et } L/D > 60$$

(d'autres corrélations existent pour le refroidissement, en écoulement laminaire, en régime non établi...)

En régime permanent, en utilisant la notion de coefficient de transfert, on obtient :

$$\rho S v \hat{C} \frac{dT}{dx} = \chi \varphi_q = \chi h (T_p - T)$$

En régime permanent pour un fluide incompressible, on peut par ailleurs écrire le bilan de quantité de mouvement ou d'énergie mécanique sur un tronçon de tube (bilans équivalents dans ce cas):

$$S \frac{dp^*}{dx} = -\chi \tau_p = -\chi Fa \frac{1}{2} \rho v^2 \Leftrightarrow \frac{\Delta p^*}{\frac{1}{2} \rho v^2 \frac{\Delta x}{D_h}} = \lambda_f = 4 Fa \text{ avec } D_h = \frac{4S}{\chi}$$

On voit que le nombre de Fanning (Fa) ou le coefficient de perte de charge linéaire (λ_f) correspondent à une sorte de coefficient de transfert qui, rappelons le, dépendent du nombre de Reynolds.

Nous mettrons en œuvre cette approche pour dimensionner un échangeur de chaleur et la pompe qui l'alimente au cours d'un TD.

L'approche filaire est utilisée dans de nombreux domaines (écoulement dans les canaux et rivière, coup de bélier..); sont indiqués ci-dessous les équations de transport de la masse, de la masse d'un constituant et de la quantité de mouvement pour des situations assez générales (masse volumique et section variable) avec comme hypothèse principale que les variables sont uniformes sur une section transversale (sauf à proximité des parois).

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S v}{\partial x} = \varphi_m \chi$$

$$\frac{\partial \rho \omega S}{\partial t} + \frac{\partial \rho \omega S v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho S D_{i,eff} \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) + \varphi_i \chi + \pi_i S$$

$$\frac{\partial \rho v S}{\partial t} + \frac{\partial \rho v S v}{\partial x} = \tau_p \chi - S \frac{\partial p}{\partial x}$$

Les deux premiers termes des équations sont l'accumulation et le bilan des flux convectifs.

Pour la masse totale le membre de droite est un apport de masse au niveau des parois (si elles sont poreuses par exemple)

Pour la masse d'un constituant le membre de droite comporte un terme de diffusion effective axiale (éventuellement dû à la turbulence), un terme d'apport au niveau des parois et un terme source volumique (dû à des réactions chimiques)

Dans le bilan de quantité de mouvement, la courbure du système (canalisation ou canal) est négligée. Les termes sources sont les frottements en paroi ainsi que le bilan des forces de pression et de gravité qui sont regroupées dans la pression motrice. Il faut considérer le périmètre mouillé pour un canal partiellement rempli.

RECAPITULATIF *Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre **Platon** (gravé au fronton de l'Académie)*

Equations de conservation sur un élément de volume fixe • (ce point marque ce qui est essentiel)

Accumulation	Bilan des flux convectifs et diffusifs (sortie - entrée)	Terme source
$\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$+ \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$	$= 0$
$\frac{\partial \rho \omega_i}{\partial t}$	$+ \vec{\nabla} \cdot (\rho \omega_i \vec{v} + \vec{j}_i)$	$= r_i$
$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t}$	$+ \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + \vec{\tau})$	$= \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} p$
$\frac{\partial \rho \hat{U}}{\partial t}$	$+ \vec{\nabla} \cdot (\rho \hat{U} \vec{v} + \vec{j}_q)$	$= r_q - p (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\tau} : (\vec{\nabla} \vec{v})$
$\frac{\partial \rho \hat{S}}{\partial t}$	$+ \vec{\nabla} \cdot (\rho \hat{S} \vec{v} + \vec{j}_q/T)$	$= r_q/T + \sigma_s \quad \text{avec } \sigma_s \geq 0$

Equations de conservation sur un élément de masse fixée suivi dans son mouvement

Accumulation	Bilan des flux diffusifs (sortie - entrée)	Terme source
$\rho \frac{D(1/\rho)}{Dt}$		$= (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$
$\rho \frac{D\omega_i}{Dt}$	$+ \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_i$	$= r_i$
$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$	$+ \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$	$= \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} p$
$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt}$	$+ \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q$	$= r_q - p (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\tau} : (\vec{\nabla} \vec{v})$
$\rho \frac{D\hat{S}}{Dt}$	$+ \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_q/T)$	$= r_q/T + \sigma_s \quad \text{avec } \sigma_s \geq 0$

Equations d'état •

$$\rho = f\{p, T, \omega_i\}$$

$$\hat{U} = f\{p, T, \omega_i\}$$

Equations de transfert (exemples) •

$$\vec{j}_A = -\rho D_{AB} \vec{\nabla} \omega_A \quad \text{loi de Fick}$$

$$\vec{\tau} = -\rho \nu (\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) \quad \text{fluide newtonien incompressible}$$

$$\vec{j}_q = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (= -\rho \alpha \vec{\nabla} \hat{H} \text{ si } \hat{C}_p = \text{cste}) \quad \text{loi de Fourier}$$

Equations aux limites

$$\omega_i = \text{connu}, \quad \vec{j}_i \cdot \vec{n} = -\rho D_i \vec{\nabla} \omega_i \cdot \vec{n} = \text{connu} \quad \text{ou} \quad f\{\omega_i, \vec{\nabla} \omega_i \cdot \vec{n}\} = 0$$

$$\vec{v} = 0$$

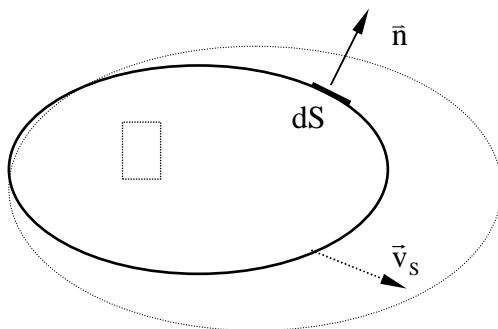
$$T = \text{connu}, \quad \vec{j}_q \cdot \vec{n} = -\lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \text{connu}, \quad \text{ou} \quad f\{T, \vec{\nabla} T \cdot \vec{n}\} = 0$$

Equations de conservation sur un domaine macroscopique

cas général

accumulation	bilan des flux convectifs à travers la limite S du domaine	bilan des flux diffusifs à travers la limite S du domaine	terme source
--------------	--	---	-----------------

$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$	$+ \int_S \rho (\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS$		$= 0$
$\frac{d}{dt} \int_V \rho \omega_i dV$	$+ \int_S \rho \omega_i (\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS$	$= - \int_S \vec{j}_i \cdot \vec{n} dS$	$+ \int_V r_i dV$
$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV$	$+ \int_S \rho (\vec{v}(\vec{v} - \vec{v}_s)) \cdot \vec{n} dS$	$+ \int_S p \vec{n} \cdot dS$	$= - \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho \vec{g} dV$
$\frac{d}{dt} \int_V \rho (\vec{x} \wedge \vec{v}) dV$	$+ \int_S \rho ((\vec{x} \wedge \vec{v})(\vec{v} - \vec{v}_s)) \cdot \vec{n} dS$	$+ \int_S p (\vec{x} \wedge \vec{n}) \cdot dS$	$= - \int_S \vec{x} \wedge (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS + \int_V \rho (\vec{x} \wedge \vec{g}) dV$
$\left(\begin{array}{l} \text{reg. permanant} \\ \rho = \text{const} \end{array} \right)$	$\int_S \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + gz \right) (\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS$	$+ \int_S p \vec{v} \cdot \vec{n} dS$	$= - \int_V (\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) dV + \dot{W}_{\text{ext}}$
$\frac{d}{dt} \int_V \rho \hat{E}_{\text{tot}} dV$	$+ \int_S \rho \hat{E}_{\text{tot}} (\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS$	$+ \int_S p \vec{v} \cdot \vec{n} dS$	$= - \int_S \vec{j}_q \cdot \vec{n} dS + \int_V r_q dV - \int_S \vec{v} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS$ ²⁶
$\frac{d}{dt} \int_V \rho \hat{S} dV$	$+ \int_S \rho \hat{S} (\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} dS$	$= - \int_S \frac{\vec{j}_q}{T} \cdot \vec{n} dS + \int_V \frac{r_q}{T} dV + \int_V \sigma_s dS$	$\boxed{\sigma_s > 0}$



Relation obtenues par :

Ostrogradskii : $\forall \varphi \{x, y, z, t\} \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} \int_V \varphi \cdot dV = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot dV + \int_S \varphi \cdot \vec{v}_s \cdot \vec{n} dS$$

Leibnitz : $\forall \vec{\varphi} \{x, y, z, t\} \in \mathbb{R}^3$

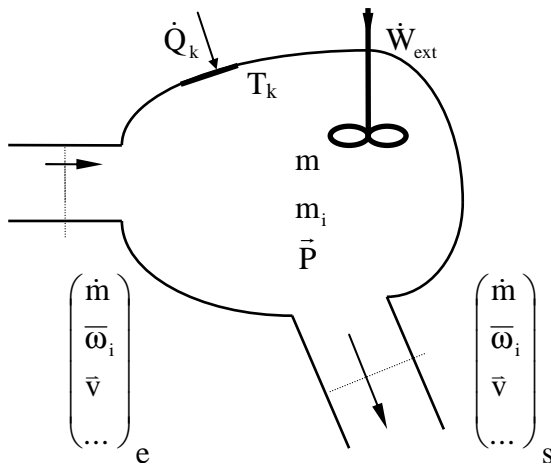
$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}) dV = \int_S (\vec{\varphi} \cdot \vec{n}) dS$$

²⁶ $\hat{E}_{\text{tot}} = \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + gz$

Equations de conservation sur un domaine macroscopique
cas d'un système ayant une section d'entrée et une section de sortie •
 en négligeant les flux diffusifs sur ces sections

accumulation	bilan des flux convectifs sur les section d'entrée et de sortie	bilan des flux à travers les parois	terme source
--------------	---	--	-----------------

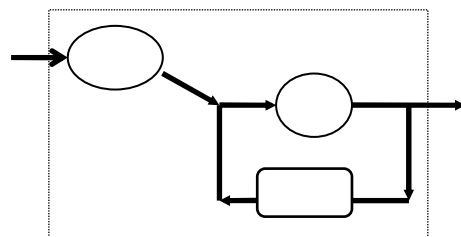
$\frac{dm}{dt}$	+	$\Delta \dot{m}_{s-e}$	=	0
$\frac{dm_i}{dt}$	+	$\Delta (\dot{m} \bar{\omega}_i)_{s-e}$	=	$\dot{m}_{i,ext} + \int_V r_i dV$
$\frac{d\vec{P}}{dt}$	+	$\Delta (\dot{m} \vec{v} + \vec{p} \vec{S})_{s-e}$	=	$\vec{F}_{ext} \left(\begin{smallmatrix} \text{sauf pression e - s} \\ \text{et gravité} \end{smallmatrix} \right) + m \vec{g}$
$\frac{d\vec{\Pi}_0}{dt}$	+	$\Delta (\dot{m} (\vec{x} \wedge \vec{v}) + p (\vec{x} \wedge \vec{S}))_{s-e}$	=	$\vec{M}_{0,ext} \left(\begin{smallmatrix} \text{sauf pression e - s} \\ \text{et gravité} \end{smallmatrix} \right) + m (0 \vec{M}_g \wedge \vec{g})$
$\left(\begin{smallmatrix} \text{reg. permanent} \\ \rho = \text{cste} \end{smallmatrix} \right)$		$\Delta \dot{V} \left(p + \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 + \rho g z \right)_{s-e}$	=	$\dot{W}_{ext} \left(\begin{smallmatrix} \text{sauf pression e - s} \\ \text{et gravité} \end{smallmatrix} \right) - \dot{W}_d \quad (\text{frontière fixe})$
$\frac{dE_{tot}}{dt}$	+	$\Delta \left(\dot{m} \left(\hat{H} + \frac{1}{2} v^2 + g z \right) \right)_{s-e}$	=	$\dot{Q} + \dot{W}_{ext} \quad (\text{frontière fixe})$
$\frac{dS}{dt}$	+	$\Delta (\dot{m} \hat{S})_{s-e}$	=	$\sum_k \frac{\dot{Q}_k}{T_k} + P_s \quad \text{avec } P_s > 0$
T_k température de l'interface où intervient le flux de chaleur \dot{Q}_k				



Bilan sur un composant / généralisation à plusieurs e/s

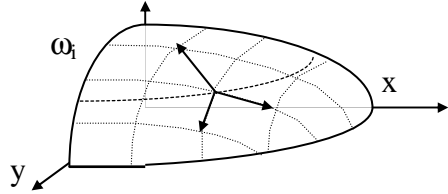


Bilan sur un ensemble complexe



Produit d'un scalaire et d'un vecteur \longrightarrow **Gradient d'un champ scalaire** ($\bar{u} \rightarrow \bar{\nabla}$) •

$$s \bar{u} = \bar{u} s = \begin{pmatrix} s u_x \\ s u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x s \\ u_y s \end{pmatrix}$$



$$\bar{\nabla} \omega_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \end{pmatrix}$$

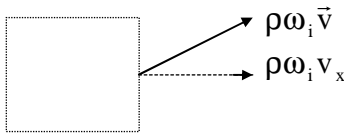
composantes = évolution de ω_i selon x et y

$\bar{\nabla} \omega_i$ = vecteur 'plus grande pente' de $\omega_i \{x, y\}$

Produit scalaire de 2 vecteurs \longrightarrow **Divergence d'un champ vectoriel** •

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u} = (u_x, u_y) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = u_x v_x + u_y v_y$$

$$\bar{\nabla} \cdot \rho \omega_i \bar{v} = \frac{\partial \rho \omega_i v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho \omega_i v_y}{\partial y}$$

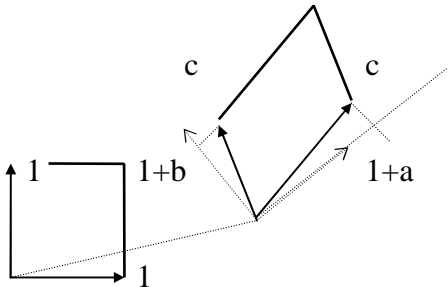


bilan (sortie - entrée) des flux à travers les facettes (divisé par le volume de l'élément), ici il s'agit du flux convectif du constituant i

Produit tensoriel de 2 vecteurs \longrightarrow **Gradient d'un champ vectoriel**

$$\bar{u} \bar{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} (v_x, v_y) = \begin{pmatrix} u_x v_x & u_x v_y \\ u_y v_x & u_y v_y \end{pmatrix}$$

$$\bar{\nabla} \bar{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$



composantes = évolution de v_x et v_y selon x et y

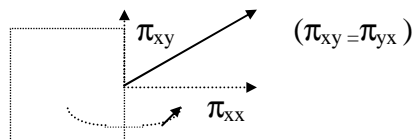
$$\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \bar{v} + (\bar{\nabla} \bar{v})^t) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

tenseur des vitesses de déformation

Produit d'un vecteur et d'une matrice \longrightarrow **Divergence d'un champ tensoriel**

$$\bar{u} \cdot \bar{\bar{\pi}} = \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{pmatrix} (u_x, u_y)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{\pi}} = \left(\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y}, \frac{\partial \pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yy}}{\partial y} \right)$$



bilan des forces (=flux de quantité de mvt) à travers les facettes /volume de l'élément

composantes = bilan des forces selon x et selon y

Norme d'un vecteur \longrightarrow **Laplacien = Divergence du gradient** •

$$s \bar{u} \cdot \bar{u} = (\bar{u} \cdot \bar{u}) s = (u_x^2 + u_y^2) s$$

$$\bar{\nabla}^2 \omega_i = \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2} = \text{'courbure' de } \omega_i \{x, y\}$$

On obtient les expressions développées des équations à partir des relations contractées en appliquant des règles de calcul matriciel . Pour ne pas surcharger les notations, en mécanique, on n'indique pas si les vecteurs sont transposés ou non. Pour savoir si un vecteur doit s'écrire en ligne ou en colonne, on regarde si le résultat doit être un scalaire, un vecteur ou une matrice ; on dit que l'ordre tensoriel vaut respectivement 0, 1 ou 2.

L'ordre tensoriel d'un **produit simple** est la somme des ordres tensoriels des facteurs

$$\bar{\nabla} \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \partial p/\partial x \\ \partial p/\partial y \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (\text{vecteur}) (\text{scalaire}) \rightarrow (\text{vecteur}) \\ 1 \quad 0 \quad 1 \end{matrix}$$

$$\bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (\text{vecteur}) (\text{vecteur}) \rightarrow (\text{matrice}) \\ 1 \quad 1 \quad 2 \end{matrix}$$

$$\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x^2 & v_x v_y \\ v_x v_y & v_y^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (\text{vecteur})(\text{vecteur}) \rightarrow (\text{matrice}) \\ 1 \quad 1 \quad 2 \end{matrix}$$

L'ordre tensoriel d'un **produit scalaire** est la somme des ordres tensoriels des facteurs minoré de 2 (produit contracté)

$$\bar{\nabla} \bullet \bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \begin{matrix} (\text{vecteur}) \bullet (\text{vecteur}) \rightarrow (\text{scalaire}) \\ 1 \quad 1 \quad 0 = (1+1) - 2 \end{matrix}$$

$$\bar{\nabla} \bullet \bar{\pi} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y} & \frac{\partial \pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yy}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (\text{vecteur}) \bullet (\text{matrice}) \rightarrow (\text{vecteur}) \\ 1 \quad 2 \quad 1 = (1+2) - 2 \end{matrix}$$

L'ordre tensoriel d'un **produit doublement contracté** est la somme des ordres tensoriels des facteurs minoré de 4

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} : \bar{\bar{\mathbf{B}}} = \text{trace}(\bar{\bar{\mathbf{A}}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{B}}}) = \sum_i \sum_j a_{ij} \cdot b_{ji} \quad \begin{matrix} (\text{matrice}) : (\text{matrice}) \rightarrow (\text{scalaire}) \\ 2 \quad 2 \quad 0 = (2+2) - 4 \end{matrix}$$

Applications

$$\bar{\nabla} \bullet (\mathbf{p} \bar{\mathbf{I}}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} & \frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix} = \bar{\nabla} \mathbf{p}$$

$$\bar{\nabla} \bullet (\bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}})^t = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \end{pmatrix} = [\bar{\nabla} (\bar{\nabla} \bullet \bar{\mathbf{v}})]^t$$

$$\bar{\nabla} \bullet (\bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \end{pmatrix} = (\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y) = \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}$$

Pour des vecteurs et des tenseurs, la **dérivation d'un produit**: $(fg)' = f'g + fg'$ s'écrit:
(on pourra vérifier facilement l'homogénéité de ces relations: scalaire ou vecteur)

$$\bar{\nabla} (s \bar{\mathbf{v}}) = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} s) + s (\bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}})$$

$$\bar{\nabla} \bullet (s \bar{\mathbf{v}}) = (\bar{\nabla} s) \bullet \bar{\mathbf{v}} + s (\bar{\nabla} \bullet \bar{\mathbf{v}})$$

$$\bar{\nabla} \bullet (\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{w}}) = \bar{\mathbf{w}} (\bar{\nabla} \bullet \bar{\mathbf{v}}) + (\bar{\mathbf{v}} \bullet \bar{\nabla} \bar{\mathbf{w}})$$

$$(\bar{\mathbf{v}} \bullet \bar{\nabla}) \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} \bar{\nabla} (\bar{\mathbf{v}} \bullet \bar{\mathbf{v}}) + (\bar{\nabla} \wedge \bar{\mathbf{v}}) \wedge \bar{\mathbf{v}}$$

$$\bar{\nabla} \bullet (\bar{\bar{\sigma}} \bullet \bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{v}} \bullet (\bar{\nabla} \bullet \bar{\bar{\sigma}}) + \bar{\bar{\sigma}} : (\bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}})$$

Principaux nombres sans dimension (on note D la longueur caractéristique)

flux convectif / flux diffusif

resistance interne/resistance externe

$$\text{Peclet matière : } Pe = \frac{vD}{D_{AB}}$$

$$\text{Biot matière : } Bi = \frac{k(D/2)}{D_{A/solide}}$$

$$\text{Peclet thermique : } Pe = \frac{vD}{\alpha}$$

$$\text{Biot thermique : } Bi = \frac{h(D/2)}{\lambda_{solide}}$$

$$\text{Peclet de quantité de mouvement = Reynolds : } Re = \frac{vD}{\nu}$$

rapports de flux diffusif

coefficient de transfert adim.

temps adimensionnel

$$\text{Schmidt : } Sc = \frac{\nu}{D_{AB}}$$

$$\text{Sherwood : } Sh = \frac{kD}{D_{AB}}$$

$$\text{Fourier matière : } Fo = \frac{D_{AB} t}{(D/2)^2}$$

$$\text{Pr andtl : } Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

$$\text{Nusselt : } Nu = \frac{hD}{\lambda}$$

$$\text{Fourier thermique : } Fo = \frac{\alpha t}{(D/2)^2}$$

$$\text{Lewis : } Le = \frac{Sc}{Pr} = \frac{\alpha}{D_{AB}}$$

$$\text{Fanning : } Fa = \frac{\tau_{paroi}}{\frac{1}{2} \rho v^2} = \frac{\lambda_f}{4}$$

$$t^* = \frac{t v}{D} \text{ ou } t^* = \frac{t \dot{V}}{V}$$

rapport de forces

$$\text{Reynolds : } Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{\rho v D}{\mu} \quad \frac{\text{inertie}}{\text{visqueux}}$$

$$\text{Euler : } Eu = \frac{p}{\rho v^2} \quad \frac{\text{pression}}{\text{inertie}}$$

$$\text{Richardson : } Ri = \frac{g \beta \Delta T D}{v^2} \quad \frac{\text{poussée d'Archimède}}{\text{inertie}}$$

$$\left(\text{Grashof} = Ri.Re^2 = \frac{g \beta \Delta T D^3}{\nu^2} \quad \text{Rayleigh} = Gr.Pr = \frac{g \beta \Delta T D^3}{\nu \alpha} \right)$$

$$\text{Froude : } Fr = \frac{v^2}{D g} \quad \frac{\text{inertie}}{\text{pesanteur}}$$

$$\text{Newton : } Ne = \frac{F}{\rho v^2 D^2} \quad C_x = \frac{F_x / S_{frontale}}{\frac{1}{2} \rho v^2} \quad \frac{\text{frottement}}{\text{inertie}}$$

$$\text{Weber : } We = \frac{\rho v^2 D}{\sigma} \quad \frac{\text{inertie}}{\text{tension superficielle}}$$

Nomenclature (non exhaustive)

A	surface d'échange	(m^2)
\hat{C}_p	capacité calorifique à pression constante	$(J.kg^{-1}.K^{-1})$
\hat{C}_v	capacité calorifique à volume constante	$(J.kg^{-1}.K^{-1})$
d, D	diamètre	(m)
D_{AB}	diffusivité	$(m^2.s^{-1})$
E_{tot}	énergie totale (interne, cinétique, potentielle)	(J)
\vec{F}	force	(N)
\vec{g}	accélération de la pesanteur	$(m.s^{-2})$
h	hauteur	(m)
\hat{H}	enthalpie massique	$(J.kg^{-1})$
\vec{j}	densité de flux diffusif ($\vec{j}_i: kg.m^{-2}.s^{-1}$ $\vec{j}_q: W.m^{-2}$)	
k	constante de Boltzmann	$(kg.m^2.s^{-2}.K^{-1})$
k	coefficient de transfert de matière	$(m.s^{-1})$
L	longueur caractéristique	(m)
m	masse	(kg)
\dot{m}	débit massique	$(kg.s^{-1})$
M	masse molaire	$(kg.mol^{-1})$
\vec{M}_{ext}	moment des forces extérieures	$(N.m)$
n	nombre de molécules par unité de volume	(m^{-3})
\vec{n}	vecteur normal à la surface orienté vers l'extérieur	
\vec{P}	quantité de mouvement du fluide contenu dans le système	$(kg.m.s^{-1})$
\dot{Q}	flux de chaleur	(W)

R	constante des gaz parfaits	(J.K ⁻¹ .mole ⁻¹)
r	rayon	(m)
S	surface (limite du système)	(m ²)
T	température	(K)
\hat{U}	énergie interne massique	(J.kg ⁻¹)
\bar{v}	vitesse	(m.s ⁻¹)
V	volume	(m ³)
\dot{V}	débit volumique	(m ³ .s ⁻¹)
\dot{W}	puissance	(W)
\dot{W}_d	puissance mécanique dissipée en chaleur (W_d / V : perte de charge)	
α	diffusivité thermique	(m ² .s ⁻¹)
β	coefficient de dilatation volumique	(K ⁻¹)
ε	porosité	
Φ	potentiel	(m ² .s ⁻²)
$\bar{\eta}$	densité de flux total (convectif + diffusif)	($\bar{\eta}_i$:kg.m ⁻² s ⁻¹ , $\bar{\eta}_q$:W.m ⁻²)
λ	conductivité thermique	(W.m ⁻¹ .K ⁻¹)
μ	viscosité dynamique	(Pa.s)
ν	viscosité cinématique (μ/ρ)	(m ² .s ⁻¹)
$\bar{\bar{\pi}}$	tenseur des contraintes totales	(Pa)
$\bar{\Pi}_0$	moment de quantité de mouvement du fluide contenu dans le système	(kg.m ² .s ⁻¹)
θ	angle	
ρ	masse volumique	(kg.m ⁻³)
$\bar{\bar{\tau}}$	tenseur des contraintes de déformation	(Pa)
ω_i	fraction massique	(kg constituant /kg total)